

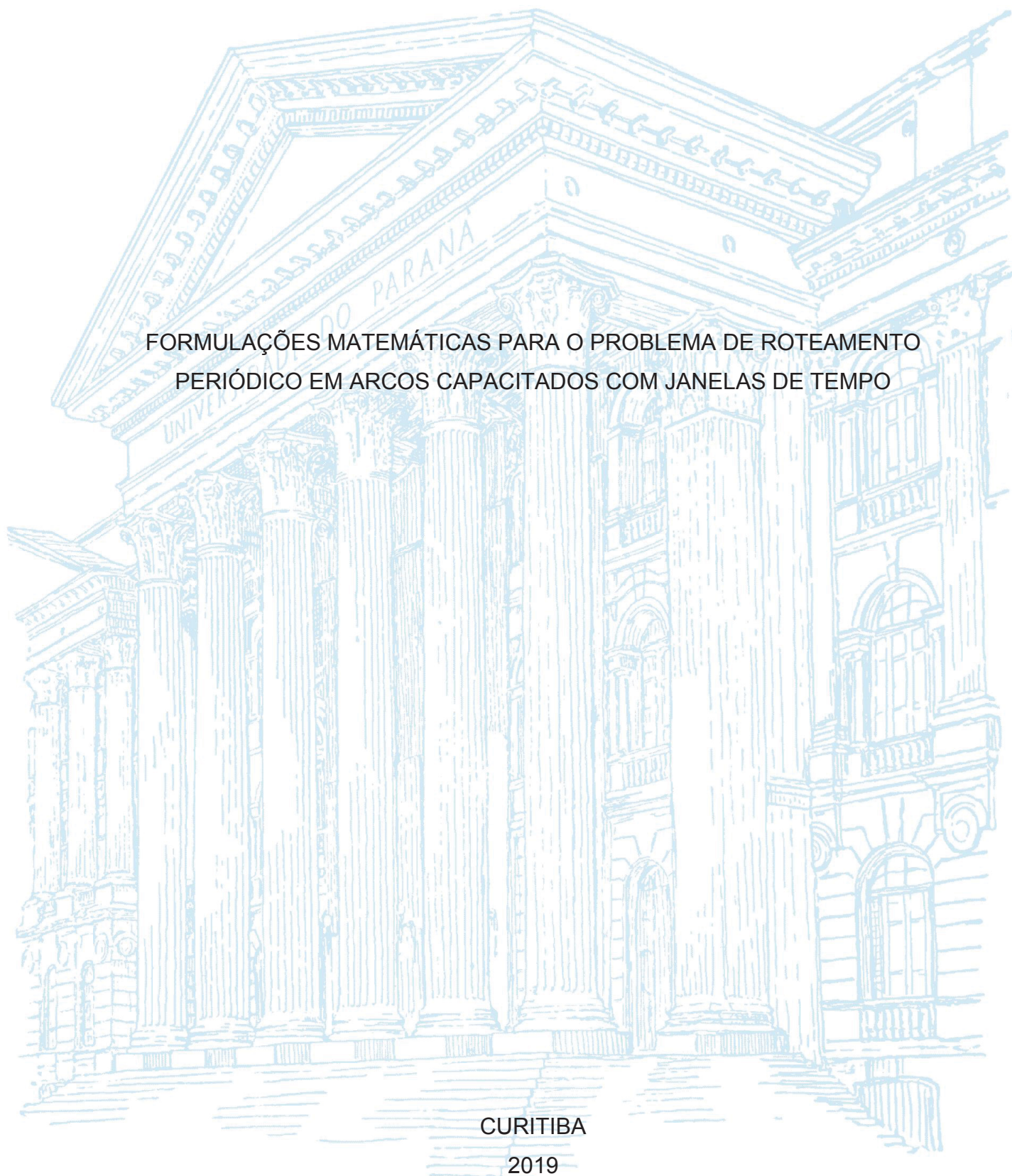
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DIEGO VENÂNCIO THOMAZ

FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO
PERIÓDICO EM ARCOS CAPACITADOS COM JANELAS DE TEMPO

CURITIBA

2019



DIEGO VENÂNCIO THOMAZ

FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO
PERIÓDICO EM ARCOS CAPACITADOS COM JANELAS DE TEMPO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, Departamentos de Construção Civil e de Matemática, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Valentim Loch

Coorientador: Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

T454f

Thomaz, Diego Venâncio

Formulações matemáticas para o problema de roteamento periódico em arcos capacitados com janelas de tempo [recurso eletrônico] / Diego Venâncio Thomaz. – Curitiba, 2019.

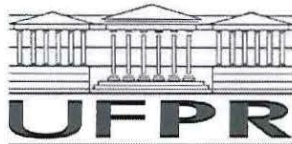
Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2019.

Orientador: Gustavo Valentim Loch – Coorientador: Cassius Tadeu Scarpin.

1. Algoritmos. 2. Arcos. 3. Lixo – Eliminação. 4. Rotas. 5. Administração do tempo. I. Universidade Federal do Paraná. II. Loch, Gustavo Valentim. III. Scarpin, Cassius Tadeu. IV. Título.

CDD: 511.8

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS
EM ENGENHARIA - 40001016030P0

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **DIEGO VENÂNCIO THOMAZ** intitulada: **FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO PERIÓDICO EM ARCOS CAPACITADOS COM JANELAS DE TEMPO**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Fevereiro de 2019.



GUSTAVO VALENTIM LOCH
Presidente da Banca Examinadora


LEANDRO MAGATÃO
Avaliador Externo (UTFPR)


THIAGO ANDRÉ GUIMARÃES
Avaliador Externo (IFPR)

(Skype) 
LEONARDO SILVA DE LIMA
Avaliador Externo (CEFET/RJ)


VOLMIR EUGÊNIO WILHELM
Avaliador Interno (UFPR)


MARIA TERESINHA ARNS STEINER
Avaliador Externo (PUC/PR)

A meus pais,
José e Lúcia.

AGRADECIMENTOS

A Deus agradeço por sempre iluminar meu caminho nesta empreitada.

A minha esposa e colega de curso, Tatiane, pelo apoio, compreensão e parceria ao longo desta trajetória.

A meus pais, José e Lúcia, pelo apoio, incentivo e confiança em mim depositados. A todos os familiares, pelas orações e compreensão nos momentos em que não pude me fazer presente.

A meu orientador, professor Gustavo Valentim Loch, primeiramente, agradeço por aceitar me orientar, mesmo eu não tendo dedicação exclusiva ao doutorado, além de toda paciência, orientação precisa ao longo do desenvolvimento do trabalho, e ensinamentos, serei eternamente grato.

A meu coorientador, professor Cassius Tadeu Scarpin, pelas discussões que proporcionaram melhorias significativas ao longo da pesquisa.

A todos os integrantes do Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização (GTAO), em especial, ao Cleder, pela sua sempre solicitude em me ajudar nos momentos de dificuldade.

Aos professores do PPGMNE, por todos os ensinamentos. Agradeço, em especial, aos professores dos quais tive a oportunidade de ser aluno: Ademir, Anselmo, Cassius, Liliana, Luzia, Neida e Paulo Henrique.

Aos membros da banca, pela disposição e contribuições apresentadas. Agradeço aos membros das bancas de qualificação e de defesa de doutorado, os professores: Leandro, Leonardo, Maria Teresinha, Thiago, Roberto e Volmir.

Ao secretário Jair, pela disposição em esclarecer as dúvidas.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), por permitir que eu concentrasse minhas aulas durante o período do curso.

Enfim, a todos que contribuíram, direta e indiretamente, para a realização deste trabalho agradeço.

“Sonhar é acreditar que se tem poder para construir alguma coisa diferente. O sonho pode até ser uma utopia a respeito de um lugar que não existe. Mesmo assim, ele cumpre o importante papel de movimentar o presente em busca de um futuro melhor.”

Gabriel Chalita

RESUMO

Esta tese apresenta o caso não direcionado do Problema de Roteamento Periódico em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo. A aplicação real do problema é associada ao problema de planejamento do serviço de coleta de lixo. Além disso, são propostas duas formulações matemáticas para o problema, uma sem e outra com desigualdades válidas. A modelagem foi realizada na transformação do problema de roteamento em arcos em um problema equivalente de roteamento em nós. As duas formulações matemáticas foram validadas sobre um conjunto de 225 instâncias da literatura para o Problema do Carteiro Rural com Janelas de Tempo. As instâncias utilizadas na validação possuem até 60 nós, 90 arestas e 45 arestas requeridas. Para testar as duas formulações matemáticas, foram adaptadas para o Problema de Roteamento Periódico em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo, 105 das 225 instâncias utilizadas na validação. As instâncias utilizadas nos testes possuem até 60 nós, 90 arestas, 45 arestas requeridas que necessitam até 142 atendimentos em 5 períodos e 4 veículos. Os resultados computacionais mostram que as formulações matemáticas aqui propostas são capazes de gerar ganhos em comparação com a formulação matemática para o Problema do Carteiro Rural com Janelas de Tempo proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Além disso, os resultados mostram que a formulação matemática com desigualdades válidas é superior à formulação matemática sem desigualdades válidas. Os resultados mais notáveis foram obtidos sobre as instâncias mais complexas, em que o tempo de processamento utilizado pelo *solver GUROBI* para obtenção de uma solução ótima da formulação matemática com desigualdades válidas, reduziu em média 73,34%, quando comparado ao resultado obtido sobre a formulação matemática sem desigualdades válidas. De modo geral, os resultados que consideram a formulação matemática com desigualdades válidas foram melhores ou iguais aos obtidos com a formulação matemática sem desigualdades válidas, em 84,76% das instâncias.

Palavras-chave: Problema de Roteamento Periódico em Arcos Capacitados. Janelas de Tempo. Desigualdades Válidas.

ABSTRACT

This thesis presents the undirected case of the Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows. The real application of the problem is associated with the problem of waste collection planning. Furthermore, two mathematical formulations are proposed for the problem, with and without valid inequalities. The methodology used in the modeling was to transform the arc routing problem into an node routing problem. The two mathematical formulations were validated on a set of 225 instances of the literature for the Rural Postman Problem with Time Windows. The instances used in the validation have up to 60 nodes, 90 edges and 45 required edges. To test the two mathematical formulations, 105 of the 225 instances used in validation were adapted for the Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows. The instances used in the tests have up to 60 nodes, 90 edges, 45 required edges and require up to 142 services in 5 periods and 4 vehicles. Computational results show that the mathematical formulations, proposed here, overcame the mathematical formulation for the Rural Postman Problem with Time Windows proposed by Monroy-Licht, Amaya and Langevin (2014). Moreover, the results show that the mathematical formulation with valid inequalities is superior to the mathematical formulation without valid inequalities. The most notable results were obtained on the most complex instances, in which the processing time used by the GUROBI solver to obtain an optimal solution reduced on average 73.34% when compared the results obtained about the mathematical formulation with valid inequalities with that one obtained about the mathematical formulation without valid inequalities. In general, the results presented considering the mathematical formulation with valid inequalities were superior or equal to those obtained with the mathematical formulation without valid inequalities in 84.76% of the instances.

Keywords: Periodic Capacitated Arc Routing Problem. Time Windows. Valid Inequalities.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO DE UM CONJUNTO DE RUAS.....	20
FIGURA 2 – ROTA DO PERÍODO 1	25
FIGURA 3 – ROTA DO PERÍODO 2	26
FIGURA 4 – GRAFO TRANSFORMADO COM NÓS E ARESTAS ARTIFICIAIS	54
FIGURA 5 – ROTAS SOBRE O GRAFO TRANSFORMADO	55
FIGURA 6 – GRAFO COM NOVAS NOTAÇÕES	57
FIGURA 7 – GRAFO TRANSFORMADO COM ARESTAS REQUERIDAS	60
FIGURA 8 – ROTAS SOBRE O GRAFO DO PROBLEMA ORIGINAL	64
FIGURA 9 – TRANSFORMAÇÃO DO ARP EM NRP	65
FIGURA 10 – ILUSTRAÇÃO DAS DESIGUALDADES VÁLIDAS 45 E 46	71
FIGURA 11 – ILUSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE VÁLIDA 47	72
FIGURA 12 – ILUSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE VÁLIDA 48	73
FIGURA 13 – PROPOSTA DE MONROY-LICHT <i>ET AL.</i> (2014) X MODELO 1	78
FIGURA 14 – PROPOSTA DE MONROY-LICHT <i>ET AL.</i> (2014) X MODELO 2	81
FIGURA 15 – MODELO 1 X MODELO 2	89
FIGURA 16 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-B13C26-P.....	92
FIGURA 17 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-B20B14-P.....	93
FIGURA 18 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-B20B17-P.....	93
FIGURA 19 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-B40C214-P.....	94
FIGURA 20 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-C40C148-P	95

LISTA DE TABELAS

QUADRO 1 – COMBINAÇÕES DE POSSÍVEIS PERÍODOS DE ATENDIMENTO ..	22
QUADRO 2 – DEMANDAS POR COMBINAÇÕES	23
TABELA 3 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO RPPTW	32
TABELA 4 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO CRPPTW	37
TABELA 5 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO PCARP	43
TABELA 6 – SÍNTESE DOS PCARPs	49
QUADRO 7 – COMBINAÇÕES DE POSSÍVEIS PERÍODOS DE ATENDIMENTO ..	58
QUADRO 8 – DEMANDAS POR COMBINAÇÕES	58
QUADRO 9 – CUSTO DE TRAVESSIA DOS ARCOS DO GRAFO TRANSFORMADO	61
QUADRO 10 – TEMPO DE TRAVESSIA SOBRE OS ARCOS DO GRAFO TRANSFORMADO	62
TABELA 11 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO PCARPTW	66
TABELA 12 – RESOLUÇÃO DA RELAXAÇÃO LINEAR DOS MODELOS 1 E 2	75
TABELA 13 – RESULTADOS SOBRE AS FORMULAÇÕES: MONROY-LICHT ET AL. (2014) E MODELOS 1 E 2	77
TABELA 14 – RESULTADOS SOBRE INSTÂNCIAS RESOLVIDAS ATÉ O TEMPO MÁXIMO DE PROCESSAMENTO	80
TABELA 15 – CLASSIFICAÇÃO DAS INSTÂNCIAS RESOLVIDAS ATÉ O TEMPO MÁXIMO DE PROCESSAMENTO	81
TABELA 16 – INSTÂNCIAS COM JANELAS DE TEMPO JUSTAS E RESULTADOS	85
TABELA 17 – INSTÂNCIAS COM JANELAS DE TEMPO INTERMEDIÁRIAS E RESULTADOS	86
TABELA 18 – INSTÂNCIAS COM JANELAS DE TEMPO LARGAS E RESULTADOS	87
TABELA 19 – RESULTADOS SOBRE OS MODELOS 1 E 2	88
TABELA 20 – INSTÂNCIAS RESOLVIDAS ATÉ O TEMPO MÁXIMO DE PROCESSAMENTO	90
TABELA 21 – INSTÂNCIAS UTILIZADAS NA VALIDAÇÃO DO PCARPTW E RESULTADOS	104

LISTA DE SIGLAS

ARP	- <i>Arc Routing Problem</i>
NRP	- <i>Node Routing Problem</i>
VRP	- <i>Vehicle Routing Problem</i>
ARPTW	- <i>Arc Routing Problem with Time Windows</i>
NRPTW	- <i>Node Routing Problem with Time Windows</i>
CPP	- <i>Chinese Postman Problem</i>
RPP	- <i>Rural Postman Problem</i>
CPPTW	- <i>Chinese Postman Problem with Time Windows</i>
RPPTW	- <i>Rural Postman Problem with Time Windows</i>
CARP	- <i>Capacitated Arc Routing Problem</i>
CRPP	- <i>Capacitated Rural Postman Problem</i>
CARPTW	- <i>Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows</i>
CRPPTW	- <i>Capacitated Rural Postman Problem with Time Windows</i>
PCARP	- <i>Periodic Capacitated Arc Routing Problem</i>
PRPP	- <i>Periodic Rural Postman Problem</i>
PCARPTW	- <i>Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVO GERAL.....	16
1.1.1	Objetivos Específicos	16
1.2	LIMITAÇÕES.....	17
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	17
2	DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA	19
2.1	GRAFOS	19
2.2	O PROBLEMA PCARPTW	20
3	REVISÃO DE LITERATURA.....	28
3.1	PROBLEMAS NÃO CAPACITADOS	28
3.2	PROBLEMAS CAPACITADOS.....	35
3.3	PROBLEMAS PERIÓDICOS	40
4	FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PROPOSTAS.....	51
4.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	51
4.2	TÉCNICAS PARA A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE UM ARPTW	53
4.2.1	Geração de Nós e Arestas Artificiais	54
4.2.2	Transformação do ARPTW em NRPTW.....	56
4.3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO 1	65
4.4	DESIGUALDADES VÁLIDAS	69
4.4.1	Adaptações e Propostas de Novas Desigualdades Válidas	70
4.5	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO 2	73
5	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	76
5.1	VALIDAÇÃO DOS MODELOS 1 E 2	76
5.2	GERAÇÃO DAS INSTÂNCIAS PARA O PCARPTW.....	83
5.3	RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DO PCARPTW	84
5.4	ANÁLISE COMPARATIVA DE CONVERGÊNCIA ENTRE OS MODELOS	91
6	CONCLUSÕES	96
	REFERÊNCIAS.....	99
	APÊNDICE.....	104

1 INTRODUÇÃO

O planejamento do serviço de coleta de lixo urbano é uma das estratégias mais importantes para o gerenciamento de resíduos sólidos, pois pode gerar melhorias, que vão desde a redução de custos na efetivação do serviço até a diminuição do número de casos de doenças ocasionadas pelo acúmulo de lixo. Além disso, entre 60% e 80% dos custos do gerenciamento de resíduos sólidos estão relacionados com o sistema de coleta e transporte dos resíduos (TIRKOLAEI; MAHDAVI; ESFAHANI, 2018). Com base nessas discussões, destaca-se a importância de um planejamento ideal para o serviço de coleta de lixo urbano, pois ele tem impacto significativo na redução de custos. Detofeno (2009) apresenta uma metodologia para a obtenção de rotas para a coleta de resíduos sólidos na cidade de Joinville, SC, e com a metodologia proposta obteve redução nos custos de aproximadamente 7,83%, em comparação com o roteamento real realizado na época.

Em geral, o serviço de coleta de lixo é realizado em dois tipos de regiões: residencial e comercial. No caso de uma região residencial, o serviço envolve a manutenção de casas particulares e prédios residenciais (KIM; KIM; SAHOO, 2006). O número de habitantes contemplados com o serviço pode variar de uma região para outra. Por exemplo, regiões com maior número de prédios tendem a possuir maior número de habitantes. Logo, a frequência com que o serviço de coleta de lixo deve ser realizado em ruas situadas nessas regiões também pode se diversificar muito. As regiões mais habitadas tendem a produzir mais resíduos e devem ser atendidas com maior frequência no horizonte de planejamento (CHU; LABADI; PRINS, 2005). Quando a produção diária não é suficientemente relevante, um serviço de coleta de lixo diário pode ser caro, e o município pode preferir disponibilizar o serviço periodicamente, ou seja, essas ruas devem ser atendidas com menor frequência (CHU; LABADI; PRINS, 2006). Por exemplo, ruas sem prédios devem ser atendidas duas vezes por semana; ruas com poucos prédios devem ser atendidas três vezes por semana; e ruas com muitos prédios devem ser atendidas todos os dias.

A coleta de lixo em regiões comerciais envolve a manutenção de lojas, restaurantes e edifícios com escritórios. Em geral, o cronograma para a realização do serviço nessas regiões é estático, já que o número de atendimentos não se altera

com frequência (KIM; KIM; SAHOO, 2006). Por exemplo, ruas situadas em regiões comerciais devem ser atendidas quatro ou cinco vezes por semana.

O planejamento do serviço da coleta de lixo urbano é um *Vehicle Routing Problem* (VRP – Problema de Roteamento de Veículos) com característica periódica e capacitada. Os VRPs podem ser divididos em duas classes: *Node Routing Problem* (NRP – Problema de Roteamento em Nós) e *Arc Routing Problem* (ARP – Problema de Roteamento em Arcos). No primeiro caso, os problemas consistem em determinar uma ou mais rotas em que um veículo deve visitar alguns ou todos os nós de um grafo (representantes da localização dos clientes) (DANTZIG; FULKERSON; JOHNSON, 1954). A segunda classe tem por objetivo determinar uma ou mais rotas para a realização de serviços sobre algumas ou todas as arestas (ou arcos) de um grafo (representantes das ruas de uma cidade) (MONROY; AMAYA; LANGEVIN, 2013).

Dessa forma, o planejamento do serviço da coleta de lixo é um ARP e, devido às características de periodicidade e capacidade, pode ser modelado como um *Periodic Capacitated Arc Routing Problem* (PCARP – Problema de Roteamento Periódico em Arcos Capacitados). O PCARP foi proposto por Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif (2002) para um contexto de planejamento do serviço de coleta de lixo.

O PCARP foi definido da seguinte forma (LACOMME; PRINS; RAMDANE-CHÉRIF, 2002). Considerando um horizonte de planejamento H de P períodos ou dias, e um grafo $G = (X, E)$, em que X é um conjunto de nós e E um conjunto de arestas, o PCARP consiste em determinar um conjunto de rotas de custo mínimo, em que uma frota de veículos deve partir de um depósito, realizar os atendimentos sobre as arestas requeridas (e) e retornar ao depósito. Além disso, cada aresta requerida e deve ser atendida $f(e)$ vezes no horizonte de planejamento H . A capacidade de carga de um veículo não pode ser excedida a cada período.

Algumas variantes do PCARP que foram tratadas na literatura ao longo das últimas décadas são:

- PCARP com serviços irregulares (MONROY; AMAYA; LANGEVIN, 2013);

- PCARP com restrições de estoque (RIQUELME-RODRIGUEZ; LANGEVIN; GAMACHE, 2014);
- PCARP com múltiplos depósitos (BATISTA, 2014);
- PCARP com múltiplas tarefas (SANTOS; SCARPIN, 2015);
- PCARP com várias equipes de trabalho e tempo máximo de jornada de trabalho (TIRKOLAEI; MAHDAVI; ESFAHANI, 2018);
- PCARP com movimentos contínuos (BATISTA, 2018).

Os ARPs possuem amplo espaço para novas pesquisas, no que diz respeito à incorporação de janelas de tempo, múltiplos depósitos e grafos mais complexos (CORBERÁN; PRINS, 2010). Dessa forma, outras características que podem ser levadas em consideração no problema do planejamento do serviço de coleta de lixo urbano são:

- ruas situadas em regiões centrais devem ser atendidas fora do horário de trânsito intenso;
- ruas situadas em regiões comerciais devem ser atendidas fora do horário comercial.

A incorporação dessas restrições de horário ao problema de planejamento produz uma das variantes do PCARP ainda não tratadas na literatura: o PCARP com restrições de janelas de tempo, isto é, o PCARPTW (*Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows*). Logo, esta tese pretende contribuir com a proposta do problema PCARPTW e também com a formulação matemática do PCARPTW, generalizando o PCARP clássico e expandindo, para mais de um período, os *Arc Routing Problem with Time Windows* (ARPTW – Problema de Roteamento em Arcos com Janelas de Tempo) já existentes na literatura: *Chinese Postman Problem with Time Windows* (CPPTW – Problema do Carteiro Chinês com Janelas de Tempo), *Rural Postman Problem with Time Windows* (RPPTW – Problema do Carteiro Rural com Janelas de Tempo), *Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows* (CARPTW – Problema de Roteamento em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo) e *Capacitated Rural Postman Problem with Time Windows* (CRPPTW – Problema do Carteiro Rural Capacitado com Janelas de Tempo).

Os ARPTW são muito difíceis de ser modelados diretamente, sem modificação no grafo original (MULLASERIL, 1996; MONROY-LICHT; AMAYA; LANGEVIN, 2014). Desse modo, a metodologia utilizada para a formulação matemática do PCARPTW, proposta nesta tese, caminha, principalmente, em direção à formulação matemática do CRPPTW proposto por Mullaseril (1996) e também à formulação matemática sobre arestas requeridas do RPPTW proposto por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Esses autores apresentam uma metodologia baseada na transformação do grafo original do problema, em que as arestas requeridas do grafo original se tornam nós em um novo grafo. O objetivo dessa transformação é associar, por meio dos nós do novo grafo, os diferentes horários de atendimento às arestas requeridas do problema original, que devem ser atendidas no máximo uma única vez a cada período. Dessa forma, o ARPTW é transformado em uma espécie de *Node Routing Problem with Time Windows* (NRPTW – Problema de Roteamento em Nós com Janelas de Tempo) (MULLASERIL, 1996; AMINU; EGLESE, 2006; TAGMOUTI; GENDREAU; POTVIN, 2007; MONROY-LICHT; AMAYA; LANGEVIN, 2014).

Outra contribuição desta tese consiste em apresentar à literatura o primeiro conjunto de instâncias para o PCARPTW. Essas instâncias foram adaptadas do RPPTW proposto por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014).

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral desta tese consiste em propor o problema PCARPTW, apresentando uma formulação matemática baseada em Programação Linear Inteira Mista (PLIM).

1.1.1 Objetivos Específicos

O alcance do objetivo geral deste trabalho proporciona o cumprimento dos seguintes objetivos específicos:

- Apresentar uma revisão de literatura, posicionando as contribuições desta tese em relação aos ARPs já apresentados na literatura;
- Propor uma formulação matemática para o PCARPTW;
- Desenvolver um conjunto de desigualdades válidas para o problema;

- Propor uma formulação matemática com as desigualdades válidas;
- Validar as formulações matemáticas propostas, sem e com desigualdades válidas, utilizando um conjunto de instâncias para o RPPTW proposto na literatura;
- Adaptar instâncias do RPPTW para o PCARPTW e propor o primeiro conjunto de instâncias da literatura;
- Comparar os resultados obtidos com as duas formulações matemáticas, sem e com desigualdades válidas.

1.2 LIMITAÇÕES

O PCARP é um problema que foi proposto por Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif em 2002. O CARP, caso particular definido para um único período, tem sido mais investigado ao longo das últimas décadas. O PCARP tem recebido uma menor atenção, devido à sua dificuldade de resolução. As pesquisas existentes concentram-se, principalmente, em propor estratégias heurísticas para resolver problemas de grande porte (reais) em tempo de processamento razoável (CHEN; HAO, 2018). Mesmo não apresentando uma estratégia heurística robusta para resolver problemas reais de grande porte, os avanços apresentados nesta tese consistem na proposta da formulação matemática para a variante do problema ainda não tratada na literatura, e na busca de uma estratégia baseada em desigualdades válidas para resolver problemas maiores.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

A presente pesquisa está organizada da seguinte forma.

O Capítulo 2 apresenta uma descrição do problema PCARPTW, além de uma breve análise proporcionada por um exemplo didático.

O Capítulo 3 apresenta trabalhos correlatos ao tema ARPTW, o qual vem sendo estudado na literatura ao longo das últimas décadas, além de formulações matemáticas de interesse à pesquisa. Ademais, o capítulo traz uma revisão de literatura mais detalhada do PCARP e suas variantes, além de uma formulação matemática que inspirou a presente pesquisa.

O Capítulo 4 descreve detalhadamente a metodologia utilizada na formulação matemática do PCARPTW, além do conjunto de desigualdades válidas e da formulação matemática alternativa com as desigualdades válidas.

O Capítulo 5 apresenta as características das instâncias utilizadas na realização de testes e os respectivos resultados obtidos na resolução das formulações matemáticas, sem e com desigualdades válidas. Além disso, são descritas também as comparações dos resultados.

O Capítulo 6 tece as conclusões de acordo com os resultados obtidos, além de uma perspectiva quanto a trabalhos futuros.

2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA

O contexto real utilizado para descrever o PCARPTW é o planejamento do serviço de coleta de lixo, mas este é apenas um exemplo, pois o modelo aqui proposto pode ser adaptado para outras aplicações reais, como: distribuição de alimentos em confinamento de animais (MULLASERIL, 1996), distribuição de correspondências postais (WANG; WEN, 2002; SUN; MENG; TAN, 2015), monitoramento de estradas (AMINU; EGGLESE, 2006; MONROY-LICHT; AMAYA; LANGEVIN, 2014), manutenção de estradas (TAGMOUTI; GENDREAU; POTVIN, 2007; TAGMOUTI; GENDREAU; POTVIN, 2011; HUANG; LIN, 2012), inspeção de linhas elétricas (RAMDANE-CHÉRIF, 2006), geração de mapas digitais (VANSTEENWEGEN; SOUFFRIAUX; SORENSEN, 2010).

2.1 GRAFOS

Quando uma malha urbana ou uma rede rodoviária é representada por um grafo, os arcos representam os trechos de ruas de mão única e as arestas os trechos de rua de mão dupla. Os nós são os cruzamentos entre as ruas.

Um grafo $G = (X, E)$ composto por $|X|$ nós e $|E|$ arestas (arcos) é uma estrutura, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|X|}\}$ é o conjunto de nós (pontos ou vértices) e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{|E|}\}$ é o conjunto de arestas (arcos).

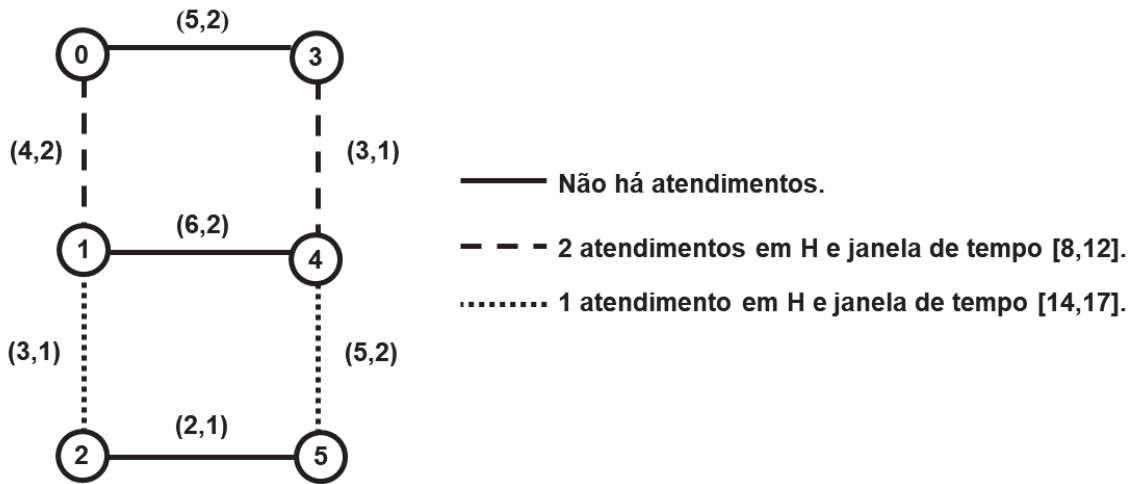
Uma aresta ou arco é uma ligação entre dois nós $i \in X$ e $j \in X$ e, em geral, sua notação está associada a este par de nós. Nesta tese, para definir uma aresta será utilizada a notação $(i, j) \in E$, e quando for conveniente será utilizada a notação $e \in E$. Já para arco, a notação utilizada será $[i, j]$. As arestas podem ser atravessadas em ambos os sentidos, não importando o nó inicial e o nó final, assim, $e = (i, j) = (j, i)$. Já para os arcos, a ordem em que os nós aparecem é de extrema importância, podendo existir o arco $[i, j]$ e não existir o arco $[j, i]$, por exemplo.

Quando o conjunto E é formado por arestas tem-se um grafo não direcionado, ou seja, não importa a ordem em que os nós aparecem, e quando E é um conjunto formado por arcos tem-se um grafo direcionado, ou seja, importa a ordem em que os nós aparecem (EVANS; MINIEKA, 1992).

2.2 O PROBLEMA PCARPTW

Para ilustrar o problema PCARPTW, suas características e particularidades, apresenta-se um exemplo didático como meio facilitador para compreensão (Figura 1). O problema é definido sobre um horizonte de planejamento H com três períodos, em um grafo $G=(X,E)$, em que $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ é um conjunto composto por 6 nós, $E=\{(0,1),(1,2),(0,3),(1,4),(2,5),(3,4),(4,5)\}$ é um conjunto formado por 7 arestas, em que $R=\{(0,1),(1,2),(3,4),(4,5)\} \subset E$ é o subconjunto das arestas requeridas. As arestas são as representações das ruas de uma cidade, e os nós, os cruzamentos entre elas. Ademais, as arestas requeridas representam as ruas que devem ser atendidas no horizonte de planejamento H .

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO DE UM CONJUNTO DE RUAS



FONTE: O Autor (2019).

O par ordenado (c_{ij}, T_{ij}) sobre cada uma das arestas $(i,j) \in E$ apresenta os seguintes parâmetros:

- c_{ij} (em unidades de distância) é o custo de travessia da aresta $(i,j) \in E$;
- T_{ij} (em unidades de tempo) é o tempo de travessia sobre a aresta $(i,j) \in E$.

O valor dos parâmetros c_{ij} e T_{ij} independe do sentido de travessia da aresta $(i, j) \in E$ e de possíveis atendimentos. Por exemplo, no caso da aresta $(0,1)$, o custo e o tempo de travessia da aresta no sentido de 0 para 1 são os mesmos que no sentido de 1 para 0, ou seja, $c_{01} = c_{10} = 4$ quilômetros e $T_{01} = T_{10} = 2$ horas, caso haja atendimento ou não. Para cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$ também são definidos outros parâmetros:

- f_{ij} é o número de atendimentos que devem ser realizados na aresta requerida $(i, j) \in R$ dentro do horizonte de planejamento H ;
- $[a_{ij}, b_{ij}]$ é a janela de tempo para início dos atendimentos da respectiva aresta requerida;
- nc_{ij} é o número combinações de possíveis períodos de atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$;
- Q_{ijkp} é a demanda que deve ser coletada na aresta requerida $(i, j) \in R$ no período p , de acordo com a combinação $k = 1, \dots, nc_{ij}$ utilizada.

No grafo ilustrado na Figura 1, cada uma das arestas requeridas $(0,1)$ e $(3,4)$ deve receber dois atendimentos no horizonte de planejamento de três períodos e no máximo um atendimento por período. Já as arestas requeridas $(1,2)$ e $(4,5)$ devem ser atendidas em apenas um dos três períodos do horizonte de planejamento H . Dessa forma, $f_{01} = f_{34} = 2$ e $f_{12} = f_{45} = 1$. Sobre as arestas $(0,3)$, $(1,4)$ e $(2,5)$, não há atendimentos, pois elas são utilizadas apenas para passagem dos veículos.

Para a realização dos atendimentos nas arestas requeridas $(i, j) \in R$, foram enumeradas as três combinações possíveis de períodos de atendimento (Quadro 1). Sendo assim, $nc_{01} = nc_{12} = nc_{34} = nc_{45} = 3$. Em ordem, as colunas indicam a aresta requerida $(i, j) \in R$ e o índice da combinação $k = 1, \dots, nc_{ij}$ de possíveis períodos de atendimento, e na sequência são apresentados os respectivos períodos do horizonte

de planejamento. O Quadro 1 é preenchido com valores binários. O número “1” indica que, no respectivo período $p = 1, 2, 3$, a aresta requerida $(i, j) \in R$ deve ser atendida, de acordo com a combinação $k = 1, \dots, nc_{ij}$. O número “0” indica que, no respectivo período, não há atendimento na aresta requerida $(i, j) \in R$, de acordo com a combinação $k = 1, \dots, nc_{ij}$.

QUADRO 1 – COMBINAÇÕES DE POSSÍVEIS PERÍODOS DE ATENDIMENTO

período arestas / combinação	1	2	3
(0,1) e (3,4) / 1	1	1	0
(0,1) e (3,4) / 2	1	0	1
(0,1) e (3,4) / 3	0	1	1
(1,2) e (4,5) / 1	1	0	0
(1,2) e (4,5) / 2	0	1	0
(1,2) e (4,5) / 3	0	0	1

FONTE: O Autor (2019).

Para o atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$, apenas uma das nc_{ij} combinações de possíveis períodos de atendimento deve ser utilizada para a realização dos f_{ij} atendimentos a serem executados no horizonte de planejamento H . Em particular, no caso da aresta requerida $(0,1)$, as combinações de possíveis períodos de atendimento são:

- 1) atendimento nos períodos 1 e 2;
- 2) atendimento nos períodos 1 e 3;
- 3) atendimento nos períodos 2 e 3.

Considerar as combinações de possíveis períodos de atendimento é de extrema importância para o problema do planejamento do serviço de coleta de lixo, pois permite determinar um espaçamento de períodos entre dois atendimentos consecutivos, e assim melhor distribuir os atendimentos ao longo do horizonte de planejamento. Ademais, elas buscam evitar que a mesma aresta requerida fique um longo período sem receber atendimento.

O Quadro 2 indica a demanda Q_{ijkp} (em quilogramas) que deve ser coletada ao longo da aresta requerida $(i,j) \in R$ a cada período p , de acordo com a combinação $k = 1, \dots, nc_{ij}$ utilizada.

QUADRO 2 – DEMANDAS POR COMBINAÇÕES			
período	1	2	3
arestas / combinação			
(0,1) e (3,4) / 1	200	100	0
(0,1) e (3,4) / 2	100	0	200
(0,1) e (3,4) / 3	0	200	100
(1,2) e (4,5) / 1	300	0	0
(1,2) e (4,5) / 2	0	300	0
(1,2) e (4,5) / 3	0	0	300

FONTE: O Autor (2019).

Caso seja utilizada a combinação 1, os dois atendimentos sobre a aresta requerida $(0,1)$ devem ser realizados nos períodos 1 e 2. No período 1, o veículo deve coletar 200 quilogramas de lixo ao longo da aresta, e, no período 2, 100 quilogramas. Além disso, os atendimentos nas arestas requeridas $(0,1)$ e $(3,4)$ devem iniciar dentro da janela de tempo $[8,12]$, ou seja, no mínimo às 8 horas e no máximo às 12 horas. Já o único atendimento sobre cada uma das arestas requeridas $(1,2)$ e $(4,5)$ deve iniciar dentro da janela de tempo $[14,17]$, ou seja, no mínimo às 14 horas e no máximo às 17 horas.

O atendimento sobre a aresta requerida $(i,j) \in R$ pode ser realizado em qualquer um dos dois sentidos de travessia da aresta, isto é, de i para j ou de j para i . Outras características do problema:

- cada aresta requerida $(i,j) \in R$ deve receber no máximo um atendimento a cada período p ;
- cada aresta $(i,j) \in E$ pode ser atravessada, por um mesmo veículo, o número de vezes que for necessário, em cada período p ;
- a demanda Q_{ijkp} da aresta requerida $(i,j) \in R$ deve ser coletada por apenas um veículo v e em um único sentido;

- a capacidade individual de carga do veículo v não pode ser excedida a cada período p ;
- o atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$ deve iniciar dentro da janela de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$, mas deslocamentos, sem atendimento, podem ser realizados fora da janela de tempo;
- os veículos podem aguardar na aresta a abertura de uma janela de tempo seguinte.

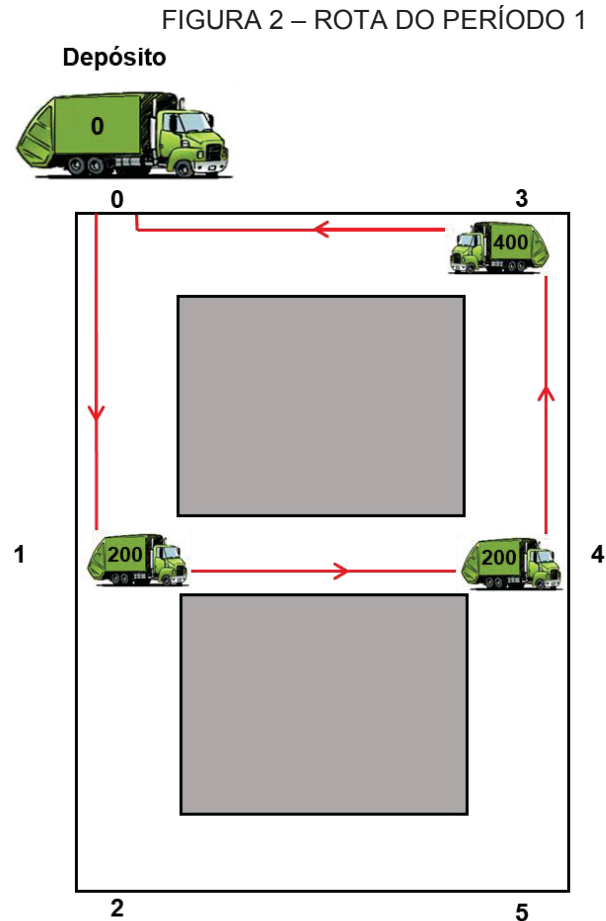
O problema consiste em determinar, sobre o horizonte de planejamento H de 3 períodos, um conjunto de rotas de custo mínimo, em que um veículo v com capacidade de carga de 1000 quilogramas, deve partir de um depósito (nó 0), realizar os f_{ij} atendimentos sobre cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$, de acordo com a janela de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$, e uma das $k = 1, \dots, nc_{ij}$ combinações de possíveis períodos de atendimento, e então retornar ao depósito. Além disso, a capacidade de carga do veículo v não pode ser excedida a cada período p .

Dessa forma, uma solução para o problema ilustrado na Figura 1, considerando as combinações de possíveis períodos de atendimento apresentadas no Quadro 1 e as respectivas demandas no Quadro 2, é representada nas rotas abaixo:

$$\begin{aligned}
 \text{Período 1:} \quad & 0 \xrightarrow[S]{8} 1 \xrightarrow[S]{10} 4 \xrightarrow[S]{12} 3 \xrightarrow[S]{13} 0 \\
 \text{Período 2:} \quad & 0 \xrightarrow[S]{6} 1 \xrightarrow[S]{8} 0 \xrightarrow[S]{10} 3 \xrightarrow[S]{12} 4 \xrightarrow[S]{14} 5 \xrightarrow[S]{16} 2 \xrightarrow[S]{17} 1 \xrightarrow[S]{18} 0
 \end{aligned}$$

As duas rotas representam os trajetos que o veículo deve realizar nos períodos 1 e 2 do horizonte de planejamento. A representação $i \rightarrow j$ indica o sentido que o veículo deve atravessar a aresta $(i, j) \in E$. O valor abaixo de cada um dos nós $i \in X$ representa o horário de saída do veículo do nó inicial da aresta $(i, j) \in E$. O símbolo S sobre cada uma das setas indica o atendimento sobre a respectiva aresta requerida $(i, j) \in R$. O valor que aparece dentro do retângulo abaixo da aresta $[3, 4]$ indica que o veículo deve aguardar uma hora nesta aresta. Para uma

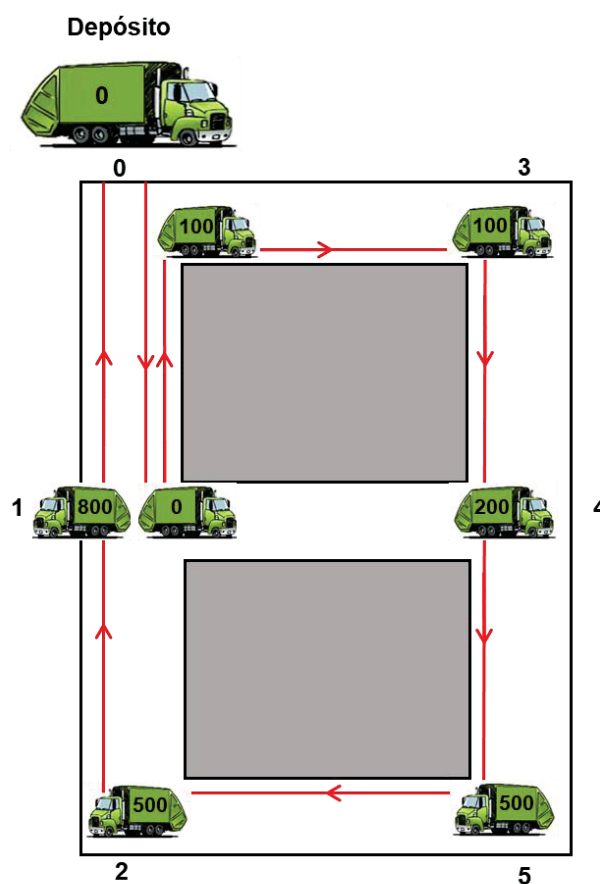
aresta $(i,j) \in E$ atravessada, o horário de saída do veículo do nó $j \in X$ é igual ao horário de saída do nó $i \in X$, mais a soma do tempo de travessia com o tempo de espera sobre a aresta $(i,j) \in E$. A Figura 2 ilustra o trajeto que deve ser realizado no período 1.



FONTE: O Autor (2019).

No período 1, o veículo deve partir do depósito às 8 horas, coletar 200 quilogramas de lixo ao longo da aresta requerida $(0,1)$, percorrer a aresta $(1,4)$, coletar 200 quilogramas de lixo na aresta requerida $(4,3)$ e retornar ao depósito por meio da aresta $(3,0)$. Assim sendo, ao final do período 1, o veículo coleta 400 quilogramas de lixo, não excedendo a sua capacidade de carga. A Figura 3 ilustra o trajeto que deve ser realizado no período 2.

FIGURA 3 – ROTA DO PERÍODO 2



FONTE: O Autor (2019).

No período 2, o veículo deve partir do depósito às 6 horas, percorrer a aresta $(0,1)$, coletar 100 quilogramas de lixo ao longo da aresta requerida $(1,0)$, atravessar a aresta $(0,3)$, coletar 100 quilogramas de lixo por toda extensão da aresta requerida $(3,4)$, coletar 300 quilogramas de lixo na aresta requerida $(4,5)$, percorrer a aresta $(5,2)$, coletar 300 quilogramas de lixo ao longo da aresta requerida $(2,1)$ e retornar ao depósito atravessando a aresta $(1,0)$. A capacidade de carga de 1000 quilogramas do veículo não é excedida nesse período, pois são coletados 800 quilogramas de lixo.

Para os atendimentos das arestas requeridas $(0,1)$ e $(3,4)$, é utilizada a combinação 1, ou seja, atendimentos nos períodos 1 e 2. Já para o atendimento sobre as arestas requeridas $(1,2)$ e $(4,5)$, é utilizada a combinação 2, ou seja, o atendimento é realizado no período 2. Os atendimentos sobre as arestas requeridas $(0,1)$ e $(3,4)$ são iniciados dentro da janela de tempo $[8,12]$, e os atendimentos

sobre as arestas requeridas $(1,2)$ e $(4,5)$ são iniciados dentro da janela de tempo $[14,17]$. O custo total das rotas (distância) é de 48 quilômetros.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Os VRPs podem ser divididos em duas classes: NRPs e ARPs (MONROY; AMAYA; LANGEVIN, 2013). Devido à natureza do problema em estudo, neste capítulo são apresentados alguns trabalhos correlatos aos ARPs, com foco especial na variante do problema com restrições de janela de tempo, o ARPTW. As três próximas seções apresentam uma classificação dos ARPs como sendo problemas não capacitados, problemas capacitados e problemas periódicos.

3.1 PROBLEMAS NÃO CAPACITADOS

Os problemas levantados nesta seção envolvem determinar uma rota de custo mínimo, em que, no período de um único dia, um veículo com capacidade de carga infinita deve atender algumas ou todas as arestas (ou arcos) de um grafo. Os problemas que se encaixam na classificação de ARPs não capacitados são descritos a seguir.

O *Chinese Postman Problem* (CPP – Problema do Carteiro Chinês) foi proposto por Meigu Guan em 1962. O problema é definido sobre um grafo $G = (X, E)$, em que X é o conjunto de nós e E é o conjunto de arestas, e consiste em encontrar uma rota de custo mínimo, em que um carteiro deve partir do depósito, atravessar todas as arestas em E , ao menos uma vez, para realizar as entregas, e retornar ao depósito (SUN; MENG; TAN, 2015).

O *Rural Postman Problem* (RPP – Problema do Carteiro Rural) é similar ao CPP, mas neste apenas o subconjunto das arestas requeridas $R \subseteq E$ deve ser atendido. Dessa forma, o RPP torna-se o CPP, quando $R = E$ (MULLASERIL, 1996).

O CPP *with Time Windows* (CPPTW – Problema do Carteiro Chinês com Janelas de Tempo) e o RPP *with Time Windows* (RPPTW – Problema do Carteiro Rural com Janelas de Tempo) são extensões do CPP e do RPP, respectivamente, para casos em que a cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$ é associada uma janela de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$ para o início do atendimento (SUN; MENG; TAN, 2015). Publicações que apresentaram estudos sobre o CPPTW e o RPPTW, e algumas delas merecem destaque aqui.

Letchford e Eglese (1998) propõem uma formulação matemática para o RPP com classes de prazo de atendimentos. Os autores consideram o problema com um único veículo, em que os arcos são separados em classes de acordo com o horário que devem ser atendidos. Um algoritmo de plano de corte baseado em desigualdades válidas, é apresentado como estratégia de resolução para o RPP. Os resultados apresentados demonstram a boa performance do algoritmo de plano de corte, resolvendo instâncias reais até a otimalidade.

Kang e Han (1998) propõem um algoritmo genético como estratégia de resolução para o RPPTW e utilizam três operadores de cruzamento: Troca Parcialmente Combinada, Troca de Ordem e Troca de Ordem Modificada. Os autores consideram as janelas de tempo flexíveis, o que possibilita, com as devidas penalizações, a realização dos atendimentos fora das janelas de tempo. Na comparação entre os resultados, o operador de cruzamento Troca de Ordem Modificada foi o que apresentou maior eficiência na resolução do RPPTW.

Wang e Wen (2002) propõem um modelo matemático para o caso direcionado do CPPTW e consideram a formação de ciclos sempre que há a repetição do nó "0" (depósito) na rota. Para os autores, esse é o único nó que pode se repetir em cada ciclo. A aplicação real do problema é associada à entrega de correspondências postais.

Já Aminu e Eglese (2006) propõem dois modelos matemáticos para o caso não direcionado do CPPTW, usando programação por restrições. Na primeira formulação, os autores abordam o ARP diretamente, e, na segunda formulação, transformam o CPPTW em um equivalente NRPTW. Os testes são realizados em instâncias com até 138 nós e 69 arestas, e resultados computacionais mostram que o tempo de processamento é significativamente reduzido quando utilizada a segunda formulação. As aplicações reais do problema são associadas a entrega de correspondências postais, monitoramento de estradas e remoção de neve em estradas congeladas.

Tan e Sun (2011) propõem uma formulação matemática para o RPP, em que consideram o tempo de travessia sobre uma aresta dependente do horário de início da travessia. Além disso, os autores apresentam um conjunto de desigualdades válidas para o problema. Os resultados computacionais apresentam os efeitos e a eficiência das desigualdades válidas.

Tan, Sun e Hou (2013) estudam o RPP com tempo de travessia sobre uma aresta dependente do horário de início da travessia. Os autores apresentam uma formulação matemática para o problema e um algoritmo de plano de corte baseado em desigualdades válidas, como estratégia de resolução para o RPP dependente de horário. Testes computacionais são realizados sobre um conjunto de 42 instâncias com até 25 nós, 50 arcos e 15 arcos requeridos. Os resultados indicam que os limitantes inferiores obtidos com o algoritmo de plano de corte são melhores que os obtidos com a relaxação linear da formulação matemática original.

Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) propõem três formulações matemáticas para o RPPTW não direcionado, denominadas: formulação sobre arestas, formulação sobre arestas requeridas e formulação sobre nós. Na formulação sobre arestas, o horário de entrada do veículo na aresta é associado ao nó inicial da aresta, entretanto, um mesmo nó pode ser inicial de diferentes arestas e a ele podem ser associados diferentes horários. A fim de contornar essa situação, na formulação sobre arestas, os autores utilizam a metodologia de gerar nós e arestas artificiais, para que os diferentes horários de entrada nas arestas sejam associados a nós distintos.

Na formulação sobre arestas requeridas, Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) associam o horário de entrada do veículo nas arestas apenas às arestas requeridas. O único atendimento sobre uma aresta requerida garante que diferentes horários de atendimento sejam associados a arestas distintas. Essa estratégia transforma o ARP em um equivalente NRP.

Na formulação sobre nós, eles associam o horário de entrada do veículo nas arestas aos nós iniciais das arestas requeridas e consideram a metodologia de gerar nós artificiais, caso um mesmo nó seja inicial de diferentes arestas requeridas. Além disso, apresentam um algoritmo de plano de corte baseado em desigualdades válidas como método de solução para o RPPTW. Os resultados computacionais mostram que esse algoritmo é capaz de encontrar uma solução ótima para instâncias geradas com até 60 nós, 90 arestas e 45 arestas requeridas, e instâncias reais com até 104 arestas requeridas. A aplicação real do problema é associada ao monitoramento de estradas, mais especificamente, à operação de espalhamento de gelo em estradas congeladas.

A formulação matemática sobre arestas requeridas proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) é aqui apresentada, porque é de grande importância

para as formulações matemáticas para o PCARPTW propostas nesta tese. O problema é definido sobre o grafo não direcionado $G=(X,E)$, em que X é o conjunto de nós e E é o conjunto de arestas. O problema consiste em encontrar uma rota de custo mínimo, em que cada uma das arestas requeridas $e \in R$ (no trabalho desses autores, as arestas requeridas $(i,j) \in R$ são denotadas por $e \in R$) deve ser atendida uma única vez, mas podem ser atravessadas inúmeras vezes. Além disso, o atendimento sobre a aresta requerida $e \in R$ deve iniciar dentro da janela de tempo $[a_e, b_e]$.

Para a formulação matemática, o grafo original $G=(X,E)$ é transformado no grafo direcionado $G_1=(X_1,A_1)$, em que X_1 é o conjunto de nós e A_1 é o conjunto de arcos. Para a transformação, cada aresta requerida $e \in R \subset E$ do grafo original é convertida para o novo grafo como o par de nós $\{i, i^0\} \in X_1$, os quais representam os sentidos contrários de travessia da mesma aresta requerida $e \in R$. Cada um dos arcos $[i, j] \in A_1$ do grafo transformado, em que os nós i e j não representam a mesma aresta requerida $e \in R$, representa no grafo original G , a travessia de uma aresta requerida $e \in R$ (representada i) e o caminho de custo mínimo saindo do nó final da aresta requerida $e \in R$, até o nó inicial da próxima aresta requerida $f \in R$ que será atendida (representada j). As notações utilizadas na formulação do RPPTW são apresentadas na Tabela 3.

TABELA 3 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO RPPTW

Símbolo	Definição
Índices e Conjuntos	
$i \in X_1$	conjunto de nós
$[i, j] \in A_1$	conjunto de arcos
$\{i, i^0\} \in N(e)$	conjunto de nós que representam a mesma aresta requerida $e \in R$
Parâmetros	
c_{ij}	custo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$
T_{ij}	tempo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$
$[a_i, b_i]$	janela de tempo para início do atendimento do nó $i \in X_1$
$a_0 = 0$	janela de tempo para o nó depósito
$M_{ij} = \max\{b_i + T_{ij} - a_j, 0\}$	constante de grande valor
Variáveis de Decisão	
x_{ij}	variável binária que indica se o nó $j \in X_1$ é atendido imediatamente após o nó $i \in X_1$
t_i	horário de chegada ao nó $i \in X_1$

FONTE: O Autor (2019).

A formulação matemática sobre arestas requeridas é dada pelas expressões (1)-(11) descritas a seguir (MONROY-LICHT; AMAYA; LANGEVIN, 2014):

$$\min z = \sum_{i \in X_1 \cup \{0\}} \sum_{\substack{j \in X_1 \cup \{0\} / \\ j \neq i, \{i, j\} \notin N(e)}} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{\substack{j \in X_1 \cup \{0\} / \\ j \neq i, j \neq i^0}} (x_{ij} + x_{i^0j}) = 1 \quad \forall \{i, i^0\} \in N(e) \quad (2)$$

$$\sum_{\substack{i \in X_1 \cup \{0\} / \\ i \neq j, i \neq j^0}} (x_{ij} + x_{ij^0}) = 1 \quad \forall \{j, j^0\} \in N(e) \quad (3)$$

$$\sum_{j \in X_1} x_{0j} = 1 \quad (4)$$

$$\sum_{j \in X_1} x_{j0} = 1 \quad (5)$$

$$t_i + T_{ij} \leq t_j + M_{ij}(1 - x_{ij}) \quad \forall i \in X_1, j \in X_1 \cup \{0\} / i \neq j, \{i, j\} \notin N(e) \quad (6)$$

$$a_i \leq t_i \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\} \quad (7)$$

$$t_i \leq b_i \quad \forall i \in X_1 \quad (8)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{\substack{k \in X_1 \cup \{0\} / \\ k \neq j}} x_{jk} \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\}, j \in X_1 \cup \{0\} / i \neq j, \{i, j\} \notin N(e) \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\}, j \in X_1 \cup \{0\} / i \neq j, \{i, j\} \notin N(e) \quad (10)$$

$$t_i \in R^+ \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\} \quad (11)$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total das travessias. Os conjuntos de restrições (2) e (3) garantem que é incluso na rota apenas um dos nós que representam a mesma aresta requerida. Os conjuntos de restrições (4) e (5) garantem que toda rota deve iniciar e terminar no depósito. Os conjuntos de restrições (6), (7) e (8) são utilizados para incorporar as janelas de tempo. O conjunto (6) é utilizado para cronometrar o horário dos atendimentos aos nós, e permite que o veículo espere, caso chegue com antecedência ao horário de abertura de uma janela de tempo. Se $x_{ij} = 1$, então, $t_i + T_{ij} \leq t_j$, ou seja, o horário de atendimento do nó $j \in X_1$ deve ser após o horário de atendimento do nó $i \in X_1$ somado ao tempo de passagem sobre o arco $[i, j] \in A_1$. Se $x_{ij} = 0$, o conjunto de restrições é sempre satisfeito, pois M_{ij} é uma constante de grande valor. Os conjuntos (7) e (8) garantem que o horário de atendimento do nó $i \in X_1$ se inicie dentro da janela de tempo $[a_i, b_i]$, ou seja, no mínimo no instante a_i e no máximo no instante b_i , respectivamente. O conjunto de restrições (9) garante a conservação de fluxo. Os conjuntos de restrições (10) e (11) definem as variáveis de decisão do modelo.

Sun, Meng e Tan (2015) apresentam uma extensão da proposta de Wang e Wen (2002), pois consideram a formação de ciclos sempre que há a repetição de um nó qualquer na rota. Os autores propõem um modelo matemático para o CPPTW direcionado, e consideram que o tempo de travessia sobre uma aresta é dependente do horário de início da travessia. Como estratégia de solução para o CPPTW, é também apresentado um algoritmo de plano de corte baseado em desigualdades válidas. Os resultados computacionais obtidos sobre um conjunto de instâncias com

até 25 nós e 60 arcos mostram a eficiência do algoritmo de plano de corte. A aplicação real do problema é associada à entrega de correspondências postais.

Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2017) apresentam uma extensão de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), propondo um algoritmo de busca adaptativa em vizinhança ampla como estratégia de resolução para o RPPTW. Os testes são realizados sobre instâncias geradas com até 60 nós, 90 arestas e 45 arestas requeridas e instâncias reais com até 104 arestas requeridas. Os resultados computacionais mostram a eficiência do algoritmo de busca que reduz significativamente o tempo de processamento para resolução do RPPTW.

Lum *et al.* (2017) apresentam uma formulação matemática para o RPPTW com opções de deslocamentos em zig-zag. Os autores consideram que os atendimentos ao longo de uma rua podem ser realizados em ambos os lados da rua durante uma única travessia. Além disso, eles propõem uma heurística híbrida para o RPPTW com zig-zag, que combina técnicas de inserção e busca local com programação inteira. Os testes computacionais são realizados sobre 25 instâncias menores com até 28 arestas, e 13 instâncias maiores com até 1200 arestas. Os resultados computacionais mostram a maior eficiência da heurística híbrida sobre as instâncias maiores.

Nossack *et al.* (2017) apresentam duas formulações matemáticas para o RPPTW com zig-zag. As formulações são baseadas em uma transformação do grafo original do problema, em que o ARP é transformado em um NRP. Os autores realizam diversos testes computacionais usando dados reais, em que buscam estudar os efeitos das janelas de tempo e das opções de zig-zag. Eles concluem que o Modelo 1 é superior ao Modelo 2 em termos de valor da função objetivo. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo e entrega de jornais.

Calogiuri *et al.* (2019) desenvolveram um algoritmo *branch-and-bound* como estratégia de resolução para o RPP com tempo de travessia sobre os arcos dependente do horário de início da travessia. Os testes computacionais são realizados sobre um conjunto de 2430 instâncias com até 60 nós e 120 arcos. Os resultados mostram que, com o algoritmo *branch-and-bound*, é possível resolver, até a otimalidade, instâncias com até 60 arcos requeridos.

3.2 PROBLEMAS CAPACITADOS

O *Capacitated Arc Routing Problem* (CARP – Problema de Roteamento em Arcos Capacitados) é uma extensão do CPP e do RPP, para casos em que, a cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$, é associada uma demanda Q_{ij} que deve ser coletada ou entregue por uma frota de V veículos com capacidade de carga finita. O CARP foi proposto por Golden e Wong (1981) e pode também ser encontrado na literatura como *Capacitated Rural Postman Problem* (CRPP – Problema do Carteiro Rural Capacitado) (MULLASERIL, 1996). Sua complexidade computacional é *NP-Hard*¹ (não polinomial difícil) (GOLDEN; WONG, 1981). Algumas aplicações reais que podem ser modeladas como CARP e CRPP são: coleta de lixo, manutenção de estradas, monitoramento de estradas, inspeção de linhas elétricas (GOLDEN; WONG, 1981).

O CARP *with Time Windows* (CARPTW – Problema de Roteamento em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo) e o CRPP *with Time Windows* (CRPPTW – Problema do Carteiro Rural com Janelas de Tempo) são extensões do CARP e do RPP, respectivamente, para casos em que a cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$ é associada uma janela de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$ para início do atendimento da respectiva aresta. Algumas publicações que apresentaram estudos sobre o CARPTW e o CRPPTW são indicadas a seguir.

Eglese (1994) apresenta um algoritmo heurístico, que envolve a solução ótima de um CPP e um algoritmo *simulated annealing* como estratégia de solução para o CARPTW. A aplicação real do problema é associada ao espalhamento de sal em estradas congeladas, pois as estradas congeladas podem ficar perigosamente escorregadias, e o sal funciona como um agente descongelante. As estradas são divididas de acordo com diferentes prioridade de atendimentos, algumas devem ser atendidas de duas em duas horas, outras devem ser atendidas a cada quatro horas.

Mullaseril (1996) propõe uma formulação matemática para o CRPPTW, em que associa o horário de entrada do veículo nas arestas apenas às arestas

¹ Um problema é *NP-Hard* se a existência de um algoritmo que possa resolvê-lo em tempo polinomial implica na existência de um algoritmo que possa resolver todos os problemas *NP-Completo* (GOLDEN; WONG, 1981). A classe *P* consiste nos problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial. A classe *NP* consiste nos problemas que são verificáveis em tempo polinomial. A classe *NP-Completo* consiste nos problemas que estão na classe *NP* e são tão difíceis quanto qualquer problema em *NP* (CORMEN; LEISERSON; RIVEST; STEIN, 2002).

requeridas, para garantir que diferentes horários de atendimento sejam associados a arestas distintas. Além disso, apresenta as seguintes estratégias heurísticas para resolver o CRPPTW: *Path Scanning* e *Modified Augment Merge*. Os testes são realizados sobre instâncias reais com até 581 nós e 770 arcos, e resultados computacionais mostram que a heurística *Path Scanning* apresenta soluções melhores. A aplicação real do problema é associada à distribuição de alimentos em um confinamento de gado.

A formulação matemática proposta por Mullaseril (1996) é aqui apresentada por ser precursora, quando o assunto é formulação matemática de ARPTW. Em sua grande maioria, os trabalhos que apresentam formulação matemática para os ARPTW utilizam metodologia semelhante à de Mullaseril (1996), transformando o ARP em um equivalente NRP.

O problema é definido sobre o grafo não direcionado $G=(X,E)$, em que X é o conjunto de nós e E é o conjunto das arestas. O problema consiste em encontrar uma rota de custo mínimo, em que cada uma das arestas requeridas $e \in R$ deve ser atendida uma única vez, mas elas podem ser atravessadas inúmeras vezes. Além disso, o atendimento sobre a aresta requerida $e \in R$ deve iniciar dentro da janela de tempo $[a_e, b_e]$. Outras características do problema são:

- um mesmo veículo v deve atender a aresta requerida $e \in R$ no máximo uma única vez durante a realização de um percurso;
- a demanda da aresta requerida $e \in R$ pode ser entregue por mais de um veículo v ;
- a capacidade máxima de carga do veículo v não pode ser excedida.

Para a formulação matemática, o grafo $G=(X,E)$ é transformado no grafo direcionado $G_1=(X_1,A_1)$, em que X_1 é o conjunto de nós e A_1 é o conjunto de arcos. O par de nós $\{i, i^0\} \in X_1$ representa os sentidos contrários de travessia da aresta requerida $e \in R$. Cada um dos arcos $[i, j] \in A_1$ representa em G a travessia de uma aresta requerida $e \in R$ (representada por i) e o caminho de custo mínimo, saindo do nó final da aresta requerida $e \in R$ até o nó inicial da próxima aresta requerida que será atendida (representada por j), desde que os nós $i \in X_1$ e $j \in X_1$.

não representem a mesma aresta requerida $e \in R$. As notações utilizadas na formulação do CRPPTW são apresentadas na Tabela 4.

TABELA 4 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO CRPPTW

Símbolo	Definição
Índices e Conjuntos	
$i \in X_1$	conjunto de nós
$[i, j] \in A_1$	conjunto de arcos
$v \in V$	conjunto de veículos
Parâmetros	
c_{ij}	custo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$
T_{ij}	tempo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$
d_i	demanda diária que deve ser entregue ao nó $i \in X_1$
$[a_i, b_i]$	janela de tempo para atendimento ao nó $i \in X_1$
Q_v	capacidade individual de carga do veículo v
M	constante de grande valor
Variáveis de Decisão	
x_{ijv}	variável binária que indica se o nó $j \in X_1$ é atendido pelo veículo v imediatamente após o nó $i \in X_1$
y_{iv}	fração da demanda entregue ao nó $i \in X_1$ pelo veículo v
t_{iv}	horário de início da entrega no nó $i \in X_1$ pelo veículo v

FONTE: O Autor (2019).

O problema é então formulado pelas expressões (12)-(20) descritas abaixo:

$$\min z = \sum_{[i,j] \in A_1} \sum_{v \in V} c_{ij} \cdot x_{ijv} \quad (12)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{[l,i] \in A_1} x_{liv} - \sum_{[i,l] \in A_1} x_{ilv} = 0 \quad \forall i \in X_1, v \in V \quad (13)$$

$$\sum_{v \in V} y_{iv} = 1 \quad \forall i \in X_1 \quad (14)$$

$$\sum_{i \in X_1} d_i y_{iv} \leq Q_v \quad \forall v \in V \quad (15)$$

$$y_{iv} \leq \sum_{[i,j] \in A_1} x_{ijv} \quad \forall i \in X_1, v \in V \quad (16)$$

$$t_{iv} + T_{ij} - M(1 - x_{ijv}) \leq t_{jv} \quad \forall [i, j] \in A_1, v \in V \quad (17)$$

$$a_i \leq t_{iv} \leq b_i \quad \forall i \in X_1, v \in V \quad (18)$$

$$x_{ijv} \in \{0, 1\} \quad \forall [i, j] \in A_1, v \in V \quad (19)$$

$$0 \leq y_{iv} \leq 1 \quad \forall i \in X_1, v \in V \quad (20)$$

A função objetivo (12) minimiza o custo total das travessias. O conjunto de restrições (13) garante a conservação de fluxo. O conjunto de restrições (14) garante que a demanda de um nó $i \in X_1$ seja entregue por pelo menos um veículo v . O conjunto de restrições (15) garante que a capacidade individual de carga Q_v do veículo v não seja excedida. O conjunto de restrições (16) garante que o nó $i \in X_1$ seja atendido por um veículo v , caso haja demanda a ser entregue. Os conjuntos de restrições (17) e (18) são utilizados para incorporar as janelas de tempo, e evitam a formação de subciclos. O conjunto (17) é utilizado para cronometrar o horário em que os nós $i \in X_1$ são atendidos, e permite que um veículo v espere, caso chegue com antecedência ao horário de abertura de uma janela de tempo seguinte. Se $x_{ijv} = 1$, então, $t_{iv} + T_{ij} \leq t_{jv}$, ou seja, o horário de atendimento do nó $j \in X_1$ pelo veículo v deve ser após o horário de atendimento do nó $i \in X_1$, somado ao tempo de passagem sobre o arco $[i, j] \in A_1$. Se $x_{ijv} = 0$, o conjunto de restrições é sempre satisfeito, pois M é uma constante de grande valor. Os conjuntos de restrições (19) e (20) garantem que as variáveis x_{ijv} e y_{iv} são binárias e reais, respectivamente.

Ramdane-Chérif (2006) propõe um algoritmo memético com um novo operador de cruzamento de ordem linear com restrição de tempo como estratégia de solução para o CARPTW. Os resultados computacionais mostram a eficiência do algoritmo memético, quando comparado com heurísticas de inserção. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo, entrega de correspondências postais e inspeções de redes elétricas.

Tagmouti, Gendreau e Potvin (2007) propõem uma formulação matemática para o CARPTW, em que consideram o custo de travessia sobre uma aresta dependente do horário de início da travessia. O ARP é transformado em um equivalente NRP, e um esquema de geração de colunas é utilizado como estratégia de resolução para o CARPTW. Os testes são realizados sobre instâncias da

literatura com até 35 arestas requeridas. A aplicação real do problema é associada a operações de espalhamento de gelo em estradas congeladas.

Reghioui, Prins e Labadi (2007) apresentam um algoritmo de busca aleatória adaptativa com religação de caminhos como estratégia de resolução para o CARPTW. Os resultados numéricos indicam que o algoritmo é competitivo com os melhores algoritmos publicados até então. Os testes são realizados sobre 24 instâncias da literatura, em que foi possível, com o algoritmo proposto pelos autores, encontrar 5 novas soluções ótimas.

Johnson e Wohlk (2009) apresentam uma estratégia de resolução para o CARPTW baseada em geração de colunas. Para a realização dos testes, são adaptadas 20 instâncias da literatura para o CARP, com até 190 arestas requeridas. Os resultados computacionais mostram que é possível resolver o CARPTW até a otimalidade, quando as janelas de tempo são justas. Além disso, mostram que o problema é mais difícil de ser resolvido quando as janelas de tempo são espaçadas ou as instâncias são maiores.

Murat Afsar (2010) propõe a geração de colunas em um algoritmo *branch-and-price* como estratégia de resolução para o CARPTW. O autor considera janelas de tempo flexíveis, o que possibilita, com as devidas penalizações, realizar os atendimentos fora das janelas de tempo. Os resultados apresentados sobre instâncias com até 40 nós e 69 arestas requeridas mostram que o tempo de processamento é proporcional ao tamanho das instâncias. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo.

Vansteenwegen, Souffriau e Sorensen (2010) propõem uma meta-heurística híbrida como método de solução para o CARP com janelas de tempo suaves. A aplicação real do problema é associada à geração de mapas digitais, em que uma frota de veículos deve percorrer um conjunto de ruas para tirar fotos. Uma característica particular do problema é que se deve evitar ao máximo tirar fotos na direção do sol, o que justifica as restrições de janelas de tempo suaves. O método de solução é testado sobre um conjunto de instâncias reais, e os resultados computacionais mostram a eficiência do método proposto.

Tagmouti, Gendreau e Potvin (2010) propõem uma heurística baseada em descida em vizinhança variável, como estratégia de resolução para o CARPTW com custo de travessia sobre uma aresta dependente do horário de início da travessia. Os testes são realizados sobre instâncias com até 140 nós e 190 arestas requeridas,

e resultados computacionais mostram que o algoritmo proposto por estes autores é competitivo quando comparado com outros algoritmos propostos na literatura. A aplicação real do problema é associada a operações de espalhamento de gelo em estradas congeladas.

Tagmouti, Gendreau e Potvin (2011) propõem uma heurística baseada em descida em vizinhança variável, como estratégia de resolução para o CARPTW dinâmico. Os autores consideram uma função linear por partes para definir o custo de travessia sobre uma aresta. Essa função é dependente do horário de início da travessia. O aspecto dinâmico considerado pelos autores é devido à atualizações de previsões meteorológicas. Os testes são realizados sobre instâncias geradas com até 100 nós e 162 arestas requeridas, e resultados computacionais mostram que o algoritmo é muito rápido para resolver o CARPTW. A aplicação real do problema é associada a operações de espalhamento de gelo em estradas congeladas.

Huang e Lin (2012) apresentam uma formulação matemática para o CARPTW, em que definem o problema considerando a possibilidade de múltiplas tarefas serem realizadas em cada um dos arcos requeridos. Além disso, os autores propõem uma heurística baseada em colônia de formigas como estratégia de solução para o CARPTW. Os testes são realizados sobre um conjunto de instâncias adaptadas da literatura com até 50 nós e 97 arestas requeridas, e uma instância real derivada da cidade de Taiwan, com 202 nós, 348 arcos e 101 arcos requeridos. Os resultados computacionais mostram a eficiência do método proposto na resolução do CARPTW. A aplicação real do problema é associada à manutenção de estradas.

3.3 PROBLEMAS PERIÓDICOS

O *Periodic Capacitated Arc Routing Problem* (PCARP – Problema de Roteamento Periódico em Arcos Capacitados) é uma generalização do CARP e do CRPP, para horizontes de planejamento maiores do que um período. O PCARP foi proposto por Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif (2002). Sua complexidade computacional é também *NP-Hard* (LACOMME; PRINS; RAMDANE-CHÉRIF, 2002). Cabe mencionar algumas publicações que apresentam estudos sobre o PCARP.

Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif (2002) definem um novo ARP, o PCARP. Os autores propõem um algoritmo genético que aborda simultaneamente os níveis de decisão tático e operacional. Os testes são realizados sobre 23 instâncias, e

resultados computacionais mostram a eficiência do algoritmo genético quando comparado a um método duas fases. A aplicação real do problema é associada ao planejamento da coleta de lixo.

Chu, Labadi e Prins (2004) propõem um modelo matemático para o PCARP. Os autores consideram um espaçamento de períodos para atendimentos de uma mesma aresta requerida. Além disso, apresentam uma estratégia de resolução baseada em uma meta-heurística *scatter search*. Os testes são realizados sobre 23 instâncias do CARP adaptadas da literatura com até 27 nós e 55 arestas, que requerem até 165 atendimentos no horizonte de planejamento. O desempenho da meta-heurística é analisado, e resultados computacionais satisfatórios são apresentados em relação à melhora dos limitantes inferiores. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo, a operações de espalhamento de gelo em estradas congeladas e inspeção de redes elétricas.

Ghiani *et al.* (2005) apresentam um algoritmo baseado em busca local em vizinhança como estratégia de resolução para o PRPP (*Periodic Rural Postman Problem*), e consideram, na definição do problema, um único veículo com capacidade de carga infinita para realizar os atendimentos no horizonte de planejamento. Os resultados computacionais indicam que o algoritmo é capaz de fornecer soluções de alta qualidade. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo e varredura de ruas.

Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif (2005) propõem um algoritmo memético como método de solução para o PCARP. O algoritmo memético é baseado em operadores de cruzamento sofisticados, que são capazes de alterar simultaneamente decisões de níveis tático e operacional. Os testes são realizados sobre instâncias com até 140 nós e 190 arestas. Resultados computacionais mostram que o algoritmo memético proporciona economias significativas em relação ao tempo de processamento de resolução do PCARP, quando comparado com uma heurística de inserção e um método duas fases. A aplicação real do problema é associada ao planejamento da coleta de lixo.

Chu, Labadi e Prins (2005) propõem uma formulação matemática para o PCARP, em que consideram combinações de possíveis períodos de atendimento para uma aresta requerida. As combinações de períodos de atendimento permitem determinar um espaçamento de períodos para o atendimento de uma mesma aresta requerida, e assim melhor distribuir os atendimentos ao longo do horizonte de

planejamento. Além disso, os autores apresentam duas heurísticas de inserção e um método duas fases, como estratégia de resolução para o PCARP. Os testes são realizados sobre 23 instâncias, com até 27 nós e 55 arestas requeridas, que necessitam de até 165 atendimentos, em um horizonte de planejamento de 7 períodos, e consideram uma frota homogênea com até 7 veículos. Os resultados computacionais mostram que as heurísticas de inserção são mais rápidas para resolver o PCARP, mas o método duas fases produz soluções melhores, quando o assunto são as instâncias que não foram resolvidas até a otimalidade. A aplicação real do problema é associada ao planejamento da coleta de lixo.

O PCARP consiste em determinar, sobre o horizonte de planejamento H com P períodos, um conjunto de rotas de custo mínimo, em que uma frota homogênea de V veículos limitados a uma capacidade de carga W deve partir do depósito, realizar os f_{ij} atendimentos sobre cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$, de acordo com as nc_{ij} combinações de possíveis períodos de atendimento, e retornar ao depósito. Algumas outras características do problema são:

- cada aresta requerida $(i, j) \in R$ deve ser atendida no máximo uma vez no período p ;
- a demanda Q_{ijkp} deve ser coletada por apenas um veículo v e em um único sentido;
- a capacidade de carga W do veículo v não pode ser excedida a cada período p .

As formulações matemáticas para o PCARPTW que serão propostas nesta tese são baseadas na formulação matemática apresentada por Chu, Labadi e Prins (2005), devido à importância das combinações de possíveis períodos de atendimento para a aplicação real discutida nesta tese. As notações utilizadas na formulação do PCARP são apresentadas na Tabela 5.

TABELA 5 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO PCARP

Símbolo	Definição
Índices e Conjuntos	
$i \in X$	conjunto de nós
$(i, j) \in E$	conjunto de arestas
$(i, j) \in R \subseteq E$	conjunto de arestas requeridas
$p \in P$	conjunto de períodos
$v \in V$	conjunto de veículos
Parâmetros	
c_{ij}	custo de travessia da aresta $(i, j) \in E$
W	capacidade carga dos veículos $v \in V$
f_{ij}	número de atendimentos que devem ser realizados na aresta requerida $(i, j) \in R$, no horizonte de planejamento
H	número total de distintas combinações de possíveis períodos de atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$
nc_{ij}	matriz das combinações de possíveis períodos de atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$ ($A_{kp} = 1$ se, e somente se, a combinação k contém o período p e $A_{kp} = 0$, caso contrário)
$A_{kp} (nc_{ij} \times P)$	demanda da aresta requerida $(i, j) \in R$ no período p da combinação k ($Q_{ijkp} = 0$ se, e somente se, $A_{kp} = 0$)
Q_{ijkp}	
Variáveis de Decisão	
x_{ijvp}	variável binária que indica se a aresta $(i, j) \in E$ é percorrida de i para j , pelo veículo v , e no período p
l_{ijvkp}	variável binária que indica se o atendimento sobre a aresta requerida $(i, j) \in R$ é realizado de i para j , pelo veículo v e no período p da combinação k
Z_{ijk}	variável binária que indica se a combinação k é utilizada para o atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$

FONTE: O Autor (2019).

O problema PCARP é então formulado pelas expressões (21)-(29) a seguir (CHU; LABADI; PRINS, 2005):

$$\min z = \sum_{(i,j) \in E} \sum_{v=1}^V \sum_{p=1}^P c_{ij} \cdot (x_{ijvp} + x_{jivp}) \quad (21)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{k=1}^{nc_{ij}} Z_{ijk} = 1 \quad \forall (i, j) \in R \quad (22)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ijvp} = \sum_{(j,i) \in E} x_{jivp} \quad \forall i \in X, v \in V, p \in P \quad (23)$$

$$x_{ijvp} \geq \sum_{k=1}^{nc_{ij}} l_{ijkp} \quad \forall (i, j) \in R, v \in V, p \in P \quad (24)$$

$$x_{jivp} \geq \sum_{k=1}^{nc_{ij}} l_{jivkp} \quad \forall (i, j) \in R, v \in V, p \in P \quad (25)$$

$$\sum_{v \in V} (l_{ijkp} + l_{jivkp}) = A_{kp} Z_{ijk} \quad \forall (i, j) \in R, k = 1, \dots, nc_{ij}, p \in P \quad (26)$$

$$\sum_{(i,j) \in R} \sum_{k=1}^{nc_{ij}} Q_{ijkp} \times (l_{ijkp} + l_{jivkp}) \leq W \quad \forall p \in P, v \in V \quad (27)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ijvp} \geq l_{rsvp} + l_{srvp} \quad (28)$$

$$\forall S \subseteq \{2, \dots, n\}, (r, s) \in E_r(S), \forall p \in P, k = 1, \dots, nc_{rs}, v \in V$$

$$x_{ijvp}, x_{jivp}, Z_{ijk}, l_{ijkp}, l_{jivkp} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E, p \in P, v \in V, k = 1, \dots, nc_{ij} \quad (29)$$

A função objetivo (21) minimiza o custo total das travessias. O conjunto de restrições (22) garante que, para o atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$, é utilizada apenas uma das combinações $k = 1, 2, \dots, nc_{ij}$ de possíveis períodos de atendimento. A continuidade de fluxo ao longo dos trajetos é garantida pelo conjunto de restrições (23). Os conjuntos de restrições (24) e (25) garantem que uma aresta requerida $(i, j) \in R$ só pode ser atendida se for atravessada. O atendimento sobre uma aresta requerida $(i, j) \in R$ só pode ser realizado por apenas um veículo v e em um único sentido, fato este garantido pelo conjunto de restrições (26). O conjunto de restrições (27) garante que a capacidade de carga W do veículo v não seja excedida a cada período p . O conjunto de restrições (28) evita a formação de subciclos. O conjunto de restrições (29) garante que todas as variáveis são binárias.

Chu, Labadi e Prins (2006) apresentam uma heurística gulosa e um algoritmo *scatter search* como estratégia de resolução para o PCARP. Os testes são realizados sobre um conjunto de instâncias da literatura, e resultados computacionais mostraram que o algoritmo *scatter search* encontra melhores

soluções iniciais e supera a heurística gulosa. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo e varredura de ruas.

Kansou e Yassine (2009) combinam um algoritmo de colônia de formigas com uma heurística de inserção como estratégia de solução para o PCARP. O algoritmo colônia de formigas é utilizado para ordenar os atendimentos e a heurística de inserção é responsável por introduzir os atendimentos. Experimentos computacionais são realizados sobre 23 instâncias adaptadas de Chu, Labadi e Prins (2005). Os resultados dos experimentos computacionais indicam que a abordagem proposta supera a maior parte dos algoritmos existentes. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo, varredura de ruas, operações de espalhamento de gelo em estradas congeladas e entrega de correspondências postais.

Mei, Tang e Yao (2011) propõem um algoritmo memético como estratégia de resolução para o PCARP. O problema é definido com um objetivo primário, que é minimizar o número de veículos utilizados, e um objetivo secundário, que consiste em minimizar o custo total das travessias. O algoritmo memético adota um novo operador de cruzamento, além de um procedimento de fusão de rotas que é incorporado ao algoritmo para lidar com o objetivo primário. O algoritmo memético proposto foi comparado com o algoritmo memético apresentado por Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif (2005) e com o algoritmo *scatter search* de Chu, Labadi e Prins (2006). Os resultados computacionais mostram que o algoritmo proposto é capaz de encontrar soluções para o PCARP com menor tempo de processamento. O problema da coleta de lixo é a aplicação real do problema.

Monroy, Amaya e Langevin (2013) propõem o PCARP com atendimentos irregulares. Os arcos são divididos em classes de acordo com o número de atendimentos que devem ser realizados em sub-períodos do horizonte de planejamento. Além disso, um algoritmo duas fases é apresentado como estratégia de solução para o PCARP com atendimentos irregulares. Os testes são realizados sobre instâncias adaptadas da literatura com até 19 nós e 44 arcos. A aplicação real do problema é associada a operações de manutenção e monitoramento de estrada, pois o tráfego de veículos é maior nos finais de semana, logo, o número de atendimento sobre essas vias deve ser maior nesse período.

Riquelme-Rodriguez, Langevin e Gamache (2014) propõem uma formulação matemática para o PCARP com restrições de estoque. A aplicação real do problema

é associada à irrigação de estradas não pavimentadas, localizadas em minas abertas, pois a poeira levantada das estradas pode danificar os veículos, reduzir a visibilidade e prejudicar a saúde dos trabalhadores quando inalada. Nessa aplicação, as restrições de estoque fazem-se necessárias, pois o material entregue por uma frota de veículos é, em seguida, consumido ao longo do período, como na gestão de estoques. Além disso, os autores propõem uma heurística de busca adaptativa em vizinhança ampla, como estratégia de resolução para o PCARP com restrições de estoque. Os testes computacionais são realizados sobre um conjunto de instâncias da literatura e um conjunto de instâncias reais. Os resultados computacionais mostram que, por meio do modelo matemático, foi possível resolver problemas menores com até 5 veículos e 30 períodos. Já com o algoritmo de busca adaptativa em vizinhança ampla, foi possível resolver problemas maiores com um grande número de períodos em grafos com até 55 arestas.

Batista (2014) propõe uma formulação matemática para o PCARP, em que considera a possibilidade do veículo não retornar ao depósito ao fim de um período, diferentemente das outras formulações já apresentadas na literatura. Os testes são realizados sobre diferentes instâncias com até 27 nós, 55 arestas, 60 dias no horizonte de planejamento e 10 veículos. A aplicação real do problema é associada à inspeção e manutenção em malhas ferroviárias.

Batista e Scarpin (2014) apresentam uma comparação dos resultados obtidos por meio do *solver CPLEX 12.4* na resolução da formulação matemática para o PCARP proposto por Monroy, Amaya e Langevin (2013), com a formulação proposta por Batista (2014). Os autores concluem que os objetivos foram alcançados de forma mais efetiva com a proposta de Batista (2014) do que com a adaptação de Monroy, Amaya e Langevin (2013) para resolver o problema de inspeção e manutenção de arcos.

Batista e Scarpin (2015) resolvem um problema real de inspeção e manutenção em malhas ferroviárias utilizando-se da formulação matemática proposta por Batista (2014).

Santos e Scarpin (2015) e Santos (2016) propõem uma formulação matemática para o PCARP, em que consideram a possibilidade de ser realizadas múltiplas tarefas com diferentes frequências sobre cada uma das arestas requeridas. A formulação matemática é validada sobre um conjunto de instâncias que foram

geradas, e possuem até 20 nós e 180 arestas. A aplicação real do problema é associada à leitura de instrumentos para o monitoramento de barragens.

Santos, Scarpin e Silva (2016) apresentam as principais formulações matemáticas para o PCARP, além das aplicações e diferenças entre as propostas de Chu, Labadi e Prins (2004), Chu, Labadi e Prins (2005), Monroy, Amaya e Langevin (2013), Batista e Scarpin (2014) e Santos e Scarpin (2015).

Oliveira (2017) apresenta uma estratégia baseada na heurística *relax-and-fix*, como método de solução para o PCARP proposto por Batista (2014). Os testes computacionais realizados indicaram que a estratégia proposta é rápida na determinação de soluções iniciais para o PCARP.

Zhang *et al.* (2017) propõem um algoritmo memético com um operador de decomposição de rotas como estratégia de resolução para o PCARP. Os autores definem um objetivo primário, que consiste em minimizar o custo total das travessias, e um objetivo secundário, que é minimizar o número de veículos utilizados para os atendimentos. O algoritmo memético com o operador de decomposição de rotas foi testado sobre um conjunto de instâncias da literatura e em um problema real. O algoritmo proposto é comparado com as abordagens heurísticas de Lacomme, Prins e Ramdane-Chérif (2005), Chu, Labadi e Prins (2006) e Mei, Tang e Yao (2011). Os resultados computacionais mostram que o algoritmo memético com operador de decomposição de rotas é superior às abordagens heurísticas propostas na literatura, pois melhora a maior parte das soluções de instâncias conhecidas, e se torna mais vantajoso quando a dimensão do problema é maior. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo.

Batista (2018) propõe uma formulação matemática para o PCARP com movimentos contínuos. O autor considera que as rotas com movimentos contínuos são caracterizadas por não terem a obrigatoriedade de serem iniciadas e terminadas no depósito. Além disso, é proposto um novo algoritmo de otimização de colônia de formigas que é utilizado para obtenção de uma solução inicial para o modelo exato. Ademais, são propostas duas abordagens híbridas que são variações do algoritmo de busca iterativa em espaço restrito. Os resultados computacionais mostram que as estratégias de resolução propostas são capazes de superar os resultados alcançados pelo *solver* comercial com a formulação matemática. A aplicação real do problema é associada à manutenção e inspeção de ferrovias.

Chen e Hao (2018) propõem um algoritmo de busca local duas fases como estratégia de resolução para o PCARP. O objetivo principal e também da primeira fase consiste em minimizar o custo total das travessias, e o objetivo secundário e da segunda fase é minimizar o número de veículos utilizados para o planejamento. Os testes são realizados sobre um conjunto de instâncias da literatura. Resultados computacionais demonstram o excelente desempenho do algoritmo de busca local duas fases, pois ele possibilitou a melhoria de soluções de instâncias conhecidas. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo.

Tirkolaei, Mahdavi e Esfahani (2018) apresentam uma formulação matemática para o PCARP, em que consideram várias equipes de trabalho com um tempo máximo de jornada de trabalho. Além disso, apresentam um algoritmo *simulated annealing* como estratégia de resolução para o PCARP. Os testes são realizados sobre um conjunto de instâncias geradas, com até 25 nós, 150 arestas, 94 arestas requeridas e 12 veículos disponíveis. Os resultados computacionais mostram a eficiência do algoritmo proposto, quando comparado ao método exato de solução. A aplicação real do problema é associada à coleta de lixo.

Corberán e Prins (2010) apresentam um anotado bibliográfico sobre os ARPs, e concluem que há um amplo espaço para novas pesquisas, no que diz respeito à incorporação de restrições de janelas de tempo, múltiplos depósitos e grafos ainda mais complexos. Na literatura, não foi encontrada qualquer publicação que apresente estudos sobre o PCARP com restrições de janelas de tempo. Os resultados alcançados nesta tese visam a contribuir com a literatura, pelo tratamento dado à variante do problema PCARP. Além disso, visa contribuir com a resolução de aplicações reais que podem ser modeladas dessa forma.

A Tabela 6 traz uma síntese de alguns trabalhos encontrados na literatura que apresentam estudos sobre o PCARP, ao longo das duas últimas décadas. Em ordem, as colunas apresentadas indicam os autores, as características do problema, o tipo de frota considerada e o método utilizado para resolver o PCARP.

TABELA 6 – SÍNTESE DOS PCARPs

Autores	Características do Problema	Tipo de Frota	Método de Solução
Lacomme <i>et al.</i> (2002)	PCARP clássico	homogênea	algoritmo genético
Chu <i>et al.</i> (2004)	PCARP clássico	homogênea	algoritmo <i>scatter search</i>
Ghiani <i>et al.</i> (2005)	RPP	único veículo com capacidade de carga infinita	busca local
Lacomme <i>et al.</i> (2005)	PCARP clássico	homogênea	algoritmo memético
Chu <i>et al.</i> (2005)	PCARP com combinações de períodos	homogênea	formulação matemática, método duas fases e heurística de inserção
Chu <i>et al.</i> (2006)	PCARP com combinações de períodos	homogênea	heurística gulosa e <i>scatter search</i>
Kansou e Yassine (2009)	PCARP clássico	homogênea	colônia de formigas
Mei <i>et al.</i> (2011)	PCARP clássico	homogênea	algoritmo memético
Monroy <i>et al.</i> (2013)	PCARP com serviços irregulares	homogênea	formulação matemática e algoritmo duas fases
Riquelme-Rodriguez <i>et al.</i> (2014)	PCARP com restrições de estoque	homogênea	formulação matemática e algoritmo de busca adaptativa em vizinhança ampla
Batista (2014)	PCARP com múltiplos depósitos	homogênea	formulação matemática
Santos e Scarpin (2015)	PCARP com múltiplas tarefas	heterogênea	formulação matemática
Zhang <i>et al.</i> (2017)	PCARP com combinações de períodos e dois objetivos	homogênea	algoritmo memético
Batista (2018)	PCARP com movimentos contínuos	homogênea	formulação matemática e algoritmo híbrido
Chen e Hao (2018)	PCARP com dois objetivos	homogênea	busca local
Tirkolaee <i>et al.</i> (2018)	PCARP com várias equipes de trabalho e tempo máximo de jornada de trabalho	heterogênea	<i>simulated annealing</i>
Thomaz <i>et al.</i> (2019, no prelo)	PCARP com janelas de tempo, em que, no período, um arco pode ser atravessado no máximo uma única vez por um mesmo veículo	heterogênea	formulação matemática

Fonte: O Autor (2019)

O último trabalho indicado na Tabela 6 dos autores Thomaz, Loch, Scarpin e Schenekemberg (2019, no prelo) é fruto de alguns resultados preliminares alcançados durante o desenvolvimento desta tese, o qual se encontra aceito e em fase de publicação. Os autores apresentam uma versão para o PCARPTW, em que, a cada período, um arco só pode ser atravessado no máximo uma única vez por um mesmo veículo. Na modelagem, utilizam a metodologia de criar nós e arestas artificiais. Além disso, apresentam um algoritmo híbrido, que explora as rápidas melhorias proporcionadas pelo *solver GUROBI* em uma eventual solução de um

modelo alternativo, o algoritmo foi proposto com o objetivo de encontrar uma solução inicial factível para o modelo original, pois o problema PCARPTW é de difícil resolução e uma solução factível é substancial. Os testes são realizados sobre um conjunto de instâncias com até 20 nós, 31 arestas, 31 arestas requeridas que necessitam até 125 atendimentos, 3 veículos e 7 períodos.

Em relação aos ARPTW existentes na literatura, esta tese apresenta uma expansão do problema para mais de um período. Já em relação aos PCARPs encontrados na literatura (Tabela 6), esta tese apresenta um estudo para a variante do PCARP ainda não tratada na literatura. Além disso, os trabalhos apresentados na Tabela 6 indicam que há um amplo campo de estudo em relação à estratégias heurísticas para resolver o PCARPTW.

4 FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PROPOSTAS

Este capítulo apresenta a proposta de formulação matemática para o PCARPTW que é baseada nas formulações matemáticas dos problemas: CRPPTW proposto por Mullaseril (1996), PCARP proposto por Chu, Labadi e Prins (2005) e RPPTW proposto por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Ademais, também é apresentado um conjunto de desigualdades válidas para o PCARPTW e uma formulação matemática alternativa com as desigualdades válidas.

4.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema PCARPTW é definido sobre o horizonte de planejamento H de P períodos, em um grafo não direcionado $G = (X, E)$, em que X é um conjunto de $|X|$ nós e E um conjunto de $|E|$ arestas que representam as ruas de uma cidade. O subconjunto $R \subseteq E$ é formado por $|R|$ arestas requeridas que representam as ruas de uma cidade que devem ser atendidas. Sobre cada uma das arestas $(i, j) \in E$ são definidos os seguintes parâmetros:

- c_{ij} é o custo de travessia da aresta $(i, j) \in E$;
- T_{ij} é o tempo de travessia sobre a aresta $(i, j) \in E$.

Os parâmetros c_{ij} e T_{ij} independem de possíveis atendimentos e sentidos de travessia das arestas. Sobre cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$ são definidos outros parâmetros:

- f_{ij} é o número de atendimentos que devem ser realizados na aresta requerida $(i, j) \in R$ e no horizonte de planejamento H ;
- nc_{ij} é o número de combinações de possíveis períodos de atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$;
- Q_{ijkp} é a demanda que deve ser coletada na aresta requerida $(i, j) \in R$, no período p , de acordo com a combinação $k = 1, \dots, nc_{ij}$ utilizada;

- $[a_{ij}, b_{ij}]$ é a janela de tempo para início dos atendimentos na aresta requerida $(i, j) \in R$.

O atendimento sobre a aresta requerida $(i, j) \in R$ pode ser realizado em qualquer um dos dois sentidos de travessia.

O problema consiste em determinar, sobre o horizonte de planejamento H de P períodos, um conjunto de rotas de custo mínimo, em que uma frota heterogênea de V veículos limitados a uma capacidade individual de carga W_v deve partir de um depósito (nó 0), realizar os f_{ij} atendimentos sobre as arestas requeridas $(i, j) \in R$, de acordo com uma das nc_{ij} combinações de possíveis períodos de atendimento e janelas de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$, e então retornar ao depósito.

Outras características do problema são:

- cada aresta requerida $(i, j) \in R$ deve ser atendida no máximo uma única vez a cada período p ;
- cada aresta $(i, j) \in E$ pode ser atravessada qualquer número de vezes pelo veículo v a cada período p ;
- a demanda Q_{ijkp} da aresta requerida $(i, j) \in R$, no período p da combinação k , deve ser coletada por apenas um veículo v e em um único sentido;
- a capacidade de carga W_v do veículo v não pode ser excedida a cada período p ;
- o atendimento da aresta requerida $(i, j) \in R$ deve se iniciar dentro da janela de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$, mas deslocamentos sem atendimentos podem ser realizados fora da janela de tempo;
- os veículos v podem aguardar a abertura de uma janela de tempo seguinte.

da primeira travessia é às 8 horas, e o da segunda travessia, às 18 horas. Logo, ao nó 1 são associados dois horários distintos.

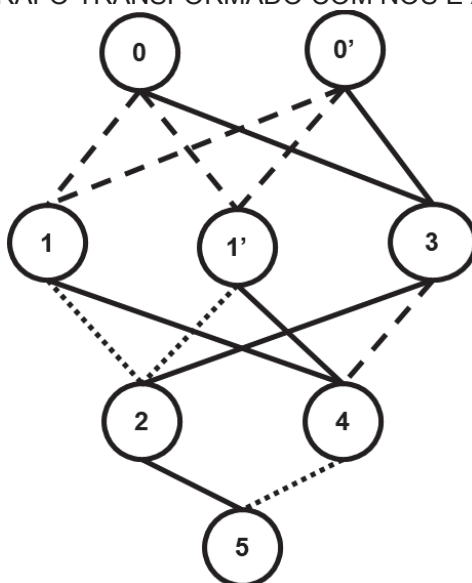
Dessa forma, a metodologia de associar ao nó inicial $i \in X$ o horário de entrada do veículo na aresta $(i, j) \in E$ traz algumas complicações ao processo de modelagem, pois diferentes horários devem ser associados a nós distintos. Outra situação que pode ocasionar diferentes horários associados a um mesmo nó ocorre quando arestas distintas com o mesmo nó inicial são atravessadas. Por exemplo, na rota planejada para o período 2, o veículo deve atravessar as arestas $(0,1)$ e $(0,3)$, em que o início de travessia da primeira aresta é às 6 horas, e o da segunda, às 10 horas. Logo, ao nó 0 são associados dois horários distintos.

As duas metodologias que serão descritas a seguir podem ser utilizadas para eliminar esse problema de representação da rota.

4.2.1 Geração de Nós e Arestas Artificiais

Uma forma de contornar essa situação é utilizar a metodologia de geração de nós e arestas artificiais, para que os diferentes horários de entrada nas arestas $(i, j) \in E$ sejam associados a nós distintos. Por exemplo, no caso da rota planejada para o período 2, é necessário criar dois nós artificiais, $0'$ e $1'$, a fim de eliminar o problema de repetição de nós. A Figura 4 traz o novo grafo com os nós e arestas artificiais.

FIGURA 4 – GRAFO TRANSFORMADO COM NÓS E ARESTAS ARTIFICIAIS



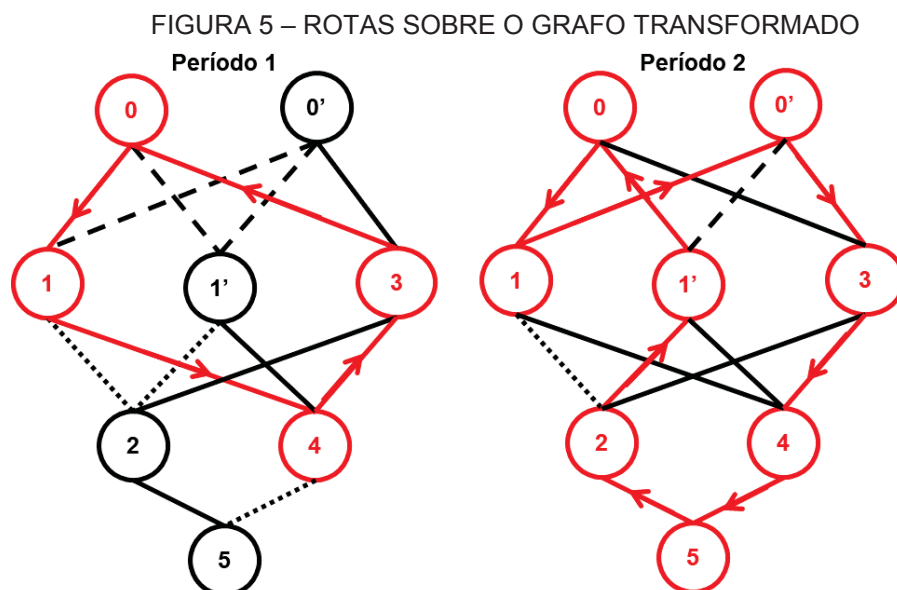
FONTE: O Autor (2019).

O custo e o tempo de travessia, as demandas, as combinações de possíveis períodos de atendimento e as janelas de tempo sobre as arestas artificiais são os mesmos das respectivas arestas originais. Desse modo, o atendimento ou travessia sobre qualquer aresta original $(i,j) \in E$ pode ser realizado por meio da própria aresta original ou por algum dos representantes artificiais. Por exemplo, o atendimento sobre a aresta requerida $(0,1) \in R$ pode ser realizado utilizando-se a própria aresta requerida $(0,1) \in R$ ou um dos representantes artificiais $(0,1')$, $(0',1)$ e $(0',1')$, e em qualquer um dos sentidos de travessia da aresta.

Com a utilização dos nós artificiais e, consequentemente, arestas artificiais, não há mais o problema de repetição de nós na rota, mas isso torna o problema ainda maior. O problema original, representado em um grafo composto por 6 nós e 7 arestas (Figura 1), passa a ser representado em um grafo modificado composto por 8 nós e 14 arestas (Figura 4). Dessa forma, a solução do problema ilustrado pode ser representada nas seguintes rotas:

$$\begin{aligned} \text{Período 1:} \quad & 0 \xrightarrow[8]{S} 1 \xrightarrow[10]{S} 4 \xrightarrow[12]{S} 3 \xrightarrow[13]{S} 0 \\ \text{Período 2:} \quad & 0 \xrightarrow[6]{S} 1 \xrightarrow[8]{S} 0' \xrightarrow[10]{S} 3 \xrightarrow[12]{S} 4 \xrightarrow[14]{S} 5 \xrightarrow[16]{S} 2 \xrightarrow[17]{S} 1' \xrightarrow[18]{S} 0 \end{aligned}$$

A Figura 5 ilustra, no grafo transformado (Figura 4), o trajeto que deve ser realizado em cada um dos respectivos períodos de atendimento.



FONTE: O Autor (2019).

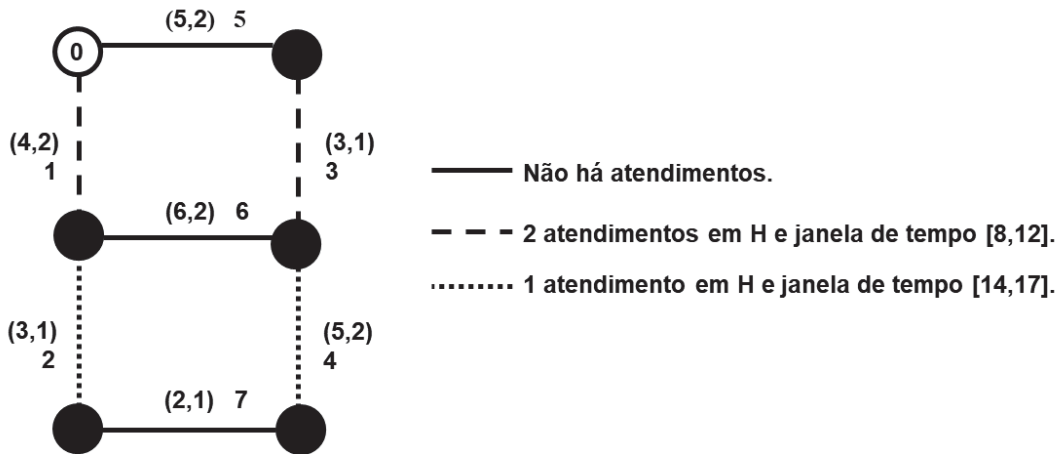
Além do problema do aumento da dimensão do grafo, outra dificuldade dessa metodologia consiste em antever o número de nós artificiais que devem ser gerados. No caso do problema ilustrado na Figura 4 e aqui utilizado como exemplo, foram criados nós artificiais apenas para os nós originais 0 e 1, porque a solução do problema original já era conhecida e eram esses os nós que se repetiam na rota. Desse modo, o problema sobre o grafo transformado pode se tornar de ainda mais difícil resolução, caso seja gerado um número excessivo de nós artificiais. Ademais, o problema sobre o grafo transformado pode não ter solução ou, ainda, a solução ótima encontrada pode não retratar a solução ótima do problema original, caso seja gerado um número insuficiente de nós artificiais.

4.2.2 Transformação do ARPTW em NRPTW

Mullaseril (1996) e Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) apresentam formulação matemática para os problemas CRPPTW e RPPTW, respectivamente. Na formulação matemática, esses autores utilizam apenas as arestas requeridas $(i, j) \in R$, para associar o horário de entrada do veículo às arestas. O único atendimento sobre cada uma das arestas requeridas $(i, j) \in R$, em um mesmo período p , garante que diferentes horários de atendimento sejam associados a arestas distintas. Desse modo, transforma-se o ARPTW em um equivalente NRPTW.

Para facilitar a compreensão dessa metodologia, são realizadas alterações nas notações de arestas do grafo do problema original $G = (X, E)$ (Figura 1). As arestas $(i, j) \in E$ tornam-se $e \in E$. A Figura 6 mostra o grafo $G = (X, E)$, ilustrado na Figura 1, com as devidas mudanças nas notações.

FIGURA 6 – GRAFO COM NOVAS NOTAÇÕES



FONTE: O Autor (2019).

O conjunto de arestas $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ representa as ruas de uma cidade, e o subconjunto das arestas requeridas $R = \{1, 2, 3, 4\} \subset E$, as ruas que devem ser atendidas. Dessa forma, as arestas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 equivalem às respectivas arestas $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(0,3)$, $(1,4)$ e $(2,5)$ do grafo apresentado na Figura 1. Ademais, são também necessárias alterações nas notações dos seguintes parâmetros:

- c_e é o custo de travessia da aresta $e \in E$;
- T_e é o tempo de travessia sobre a aresta $e \in E$;
- f_e é o número de atendimentos que devem ser realizados sobre a aresta requerida $e \in R$ e no horizonte de planejamento H ;
- $[a_e, b_e]$ é a janela de tempo para início do atendimento da aresta requerida $e \in R$;
- nc_e é o número de distintas combinações de possíveis períodos de atendimento da aresta requerida $e \in R$;
- $C_{ekp}(nc_e \times P)$ é a matriz das combinações de possíveis períodos de atendimento da aresta requerida $e \in R$ ($C_{ekp} = 1$ se, e somente se, a combinação k contém o período p e $C_{ekp} = 0$, caso contrário);
- Q_{ekp} é a demanda que deve ser coletada na aresta requerida $e \in R$, no período p da combinação $k = 1, \dots, nc_e$.

Dessa forma, para o grafo $G=(X,E)$ (Figura 6) tem-se $f_1=f_3=2$, $f_2=f_4=1$ e $nc_1=nc_2=nc_3=nc_4=3$. O Quadro 7 apresenta as combinações de possíveis períodos de atendimento das arestas requeridas $e \in R$, de acordo com a combinação $k=1,\dots,nc_e$ utilizada. O número “1” indica que a aresta requerida $e \in R$ deve ser atendida no período p , de acordo com a combinação $k=1,\dots,nc_e$ utilizada. O número “0” indica que, no período, não há atendimento sobre a aresta requerida $e \in R$, de acordo com a combinação $k=1,\dots,nc_e$ utilizada.

QUADRO 7 – COMBINAÇÕES DE POSSÍVEIS PERÍODOS DE ATENDIMENTO

período arestas / combinação	1	2	3
1 e 3 / 1	1	1	0
1 e 3 / 2	1	0	1
1 e 3 / 3	0	1	1
2 e 4 / 1	1	0	0
2 e 4 / 2	0	1	0
2 e 4 / 3	0	0	1

FONTE: O Autor (2019).

O Quadro 8 indica a demanda Q_{ekp} (em quilogramas) que deve ser coletada ao longo da aresta requerida $e \in R$, a cada período p , de acordo com a combinação de possíveis períodos de atendimento $k=1,\dots,nc_e$ utilizada.

QUADRO 8 – DEMANDAS POR COMBINAÇÕES

período arestas / combinação	1	2	3
1 e 3 / 1	200	100	0
1 e 3 / 2	100	0	200
1 e 3 / 3	0	200	100
2 e 4 / 1	300	0	0
2 e 4 / 2	0	300	0
2 e 4 / 3	0	0	300

FONTE: O Autor (2019).

Além disso, os atendimentos nas arestas requeridas 1 e 3 devem se iniciar dentro da janela de tempo $[8,12]$. Já nas arestas requeridas 2 e 4, o horário de atendimento deve se iniciar dentro da janela de tempo $[14,17]$.

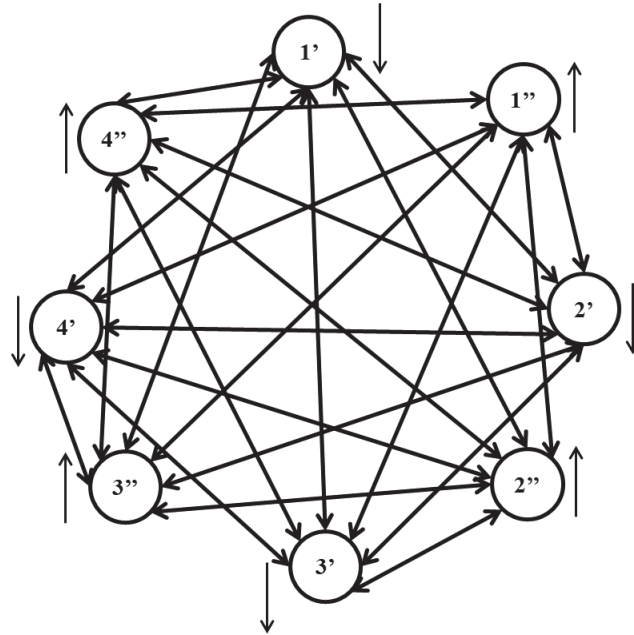
Com as devidas alterações, o problema PCARPTW é definido sobre o grafo $G=(X,E)$ (Figura 6) e consiste em determinar, sobre o horizonte de planejamento H de P períodos, um conjunto de rotas de custo mínimo, em que uma frota heterogênea de V veículos limitados a uma capacidade individual de carga W_v deve partir de um depósito (nó 0), realizar os f_e atendimentos sobre as arestas requeridas $e \in R$, de acordo com as janelas de tempo $[a_e, b_e]$ e uma das nc_e combinações de possíveis períodos de atendimento, e retornar ao depósito. Daqui em diante, o problema ilustrado na Figura 6, com as alterações nas notações, será denominado problema original.

Para fazer uso da metodologia de Mullaseril (1996) e Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), e assim descrever a formulação matemática para o PCARPTW, é necessária uma transformação no grafo $G=(X,E)$ do problema original (Figura 6). Para tanto, cada uma das $|R|$ arestas requeridas $e \in R$ é transformada em dois nós e' e e'' que representam os sentidos contrários de travessia da aresta requerida $e \in R$, e assim o grafo $G=(X,E)$ (Figura 6) é transformado no grafo direcionado $G_1=(X_1, A_1)$ (Figura 7), em que X_1 é um conjunto de $2 \cdot |R|$ nós que representam ambos os sentidos de travessia das arestas requeridas, e A_1 é um conjunto de $4 \cdot |R| \cdot (|R|-1)$ arcos², que conectam os nós $i, j \in X_1$, desde que eles não representem a mesma aresta requerida. Quando considerada a inserção do nó 0 (depósito) tem-se que o novo problema é definido sobre um grafo composto por $2 \cdot |R| + 1$ nós e $4 \cdot |R|^2$ arcos, pois são acrescentados $4 \cdot |R|$ arcos aos $4 \cdot |R| \cdot (|R|-1)$ arcos. Os $4 \cdot |R|$ arcos acrescentados são aqueles que iniciam e terminam no depósito.

² O número de arcos é dado por um arranjo simples de $2 \cdot |R|$ elementos tomados 2 a 2 e excluindo-se $2 \cdot |R|$ elementos, pois os arcos são formados pelas ligações entre os $2 \cdot |R|$ nós, exceto as ligações entre os nós que representam a mesma aresta requerida. Dessa forma, o número de arcos é dado por:

$$A_{2 \cdot |R|, 2} - 2 \cdot |R| = \frac{(2 \cdot |R|)!}{(2 \cdot |R| - 2)!} - 2 \cdot |R| = 2 \cdot |R| \cdot (2 \cdot |R| - 1) - 2 \cdot |R| = 2 \cdot |R| \cdot (2 \cdot |R| - 2) = 4 \cdot |R| \cdot (|R| - 1)$$

FIGURA 7 – GRAFO TRANSFORMADO COM ARESTAS REQUERIDAS



FONTE: O Autor (2019).

Um arco $[i, j] \in A_1$ representa no problema original, a travessia da aresta requerida $e \in R$ (representada por i) e o caminho de custo mínimo (DIJKSTRA, 1959; FLOYD, 1962), saindo do nó final da aresta requerida $e \in R$ até o nó inicial da aresta requerida $f \in R$ (representada por j). Por exemplo, tem-se no arco $[1', 3''] \in A_1$ a representação da travessia da aresta requerida $1 \in R$ (no sentido \downarrow) e o caminho de custo mínimo saindo do nó final da aresta requerida $1 \in R$ (atravessada no sentido \downarrow) até o nó inicial da aresta requerida $3 \in R$ (que deve ser atravessada no sentido \uparrow). O caminho de custo mínimo compreende a travessia da aresta $6 \in E$ (no sentido \rightarrow). Dessa forma, o arco $[1', 3''] \in A_1$ do grafo transformado (Figura 7) representa no problema original (Figura 6) o deslocamento $1(\downarrow) - 6(\rightarrow)$, ou seja, a travessia da aresta requerida $1 \in R$ (no sentido \downarrow) e a travessia da aresta $6 \in E$ (no sentido \rightarrow).

Desse modo, o custo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$ é igual ao custo de travessia da aresta requerida $e \in R$ (representada por i), mais o custo do caminho de custo mínimo, saindo do nó final da aresta requerida $e \in R$ até o nó inicial da aresta requerida $f \in R$ (representada por j). Por exemplo, o custo de travessia sobre o arco $[1', 3''] \in A_1$ é igual à 10, pois é o montante da soma do custo de

travessia sobre a aresta requerida $1 \in R$ que é igual à 4 com o custo de travessia sobre a aresta $6 \in E$ que é 6.

O Quadro 9 apresenta o custo de travessia sobre os arcos $[i, j] \in A_1$ do grafo transformado $G_1 = (X_1, A_1)$ (Figura 7), além do custo de travessia sobre os arcos que iniciam e terminam no nó “0” (depósito), que é um nó artificial e possui custo de travessia nulo.

QUADRO 9 – CUSTO DE TRAVESSIA DOS ARCOS DO GRAFO TRANSFORMADO

De \ Para	0	1'	1''	2'	2''	3'	3''	4'	4''
0	-	0	4	4	7	5	8	8	9
1'	8	-	-	4	7	13	10	10	9
1''	4	-	-	8	11	9	12	12	13
2'	10	10	6	-	-	13	10	10	5
2''	7	7	3	-	-	12	9	9	8
3'	11	11	9	9	10	-	-	3	8
3''	8	8	12	12	13	-	-	6	11
4'	14	14	10	10	7	13	10	-	-
4''	13	13	11	11	12	8	5	-	-

FONTE: O Autor (2019).

O Quadro 9 é assimétrico, pois o custo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$ pode ser diferente do custo de travessia sobre o arco $[j, i] \in A_1$. Por exemplo, o custo de travessia sobre o arco $[1', 3''] \in A_1$ é igual à 10, como visto anteriormente, por outro lado, o custo de travessia sobre o arco $[3'', 1'] \in A_1$ é igual à 8, pois descreve a soma do custo de travessia sobre a aresta requerida $3 \in R$ (no sentido \uparrow) que é igual à 3, mais 5 que é o custo do caminho de custo mínimo saindo do nó final da aresta requerida $3 \in R$ (atravessada no sentido \uparrow) até o nó inicial da aresta requerida $1 \in R$ (que deve ser atravessada no sentido \downarrow). Nesse caso, o caminho de custo mínimo consiste na travessia da aresta $5 \in E$ (no sentido \leftarrow).

O tempo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$ é igual ao tempo de travessia sobre a aresta requerida $e \in R$ (representada por i), mais o tempo de travessia sobre o caminho de custo mínimo, saindo do nó final da aresta requerida $e \in R$ até o nó inicial da aresta requerida $f \in R$ (representada por j). Por exemplo, o tempo de travessia sobre o arco $[1', 3''] \in A_1$ é igual à 4, pois retrata o tempo de travessia sobre

a aresta requerida $1 \in R$ (no sentido \downarrow) que é igual à 2, mais o tempo de travessia sobre a aresta $6 \in E$ (no sentido \rightarrow) que é 2. Ressalta-se que a travessia da aresta $6 \in E$ representa o caminho de custo mínimo.

O Quadro 10 apresenta o tempo de travessia sobre os arcos $[i, j] \in A_1$ do grafo transformado $G_1 = (X_1, A_1)$ (Figura 7), além do tempo de travessia sobre os arcos que iniciam e terminam no nó "0", que possui tempo de travessia nulo.

QUADRO 10 – TEMPO DE TRAVESSIA SOBRE OS ARCOS DO GRAFO TRANSFORMADO

Para De	0	1'	1''	2'	2''	3'	3''	4'	4''
0	-	0	2	2	3	2	3	3	4
1'	4	-	-	2	3	5	4	4	4
1''	2	-	-	4	5	4	5	5	6
2'	4	4	2	-	-	5	4	4	2
2''	3	3	1	-	-	4	3	3	3
3'	4	4	3	3	4	-	-	1	3
3''	3	3	4	4	5	-	-	2	4
4'	6	6	4	4	3	5	4	-	-
4''	5	5	4	4	5	3	2	-	-

FONTE: O Autor (2019).

O Quadro 10 é também assimétrico, pois o tempo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$ é, em geral, diferente do tempo de travessia sobre o arco $[j, i] \in A_1$. Por exemplo, o tempo de travessia sobre o arco $[1', 3''] \in A_1$ é igual à 4, como apresentado anteriormente, já o tempo de travessia sobre o arco $[3'', 1'] \in A_1$ é igual à 3, pois é o montante da soma do tempo de travessia sobre a aresta requerida $3 \in R$ (no sentido \uparrow) que é igual à 1 mais o tempo de travessia sobre a aresta $5 \in E$ (no sentido \leftarrow) que é igual à 2. Destaca-se que a travessia da aresta $5 \in E$ (no sentido \leftarrow) consiste no caminho de custo mínimo saindo do nó final da aresta requerida $3 \in R$ (atravessada no sentido \uparrow) até o nó inicial da aresta requerida $1 \in R$ (que deve ser atravessada no sentido \downarrow).

Os parâmetros f_e , nc_e , $C_{ekp}(nc_e \times P)$, Q_{ekp} e $[a_e, b_e]$ definidos sobre a aresta requerida $e \in R$ do problema original são mantidos para os nós $e' \in X_1$ e $e'' \in X_1$ que representam os sentidos contrários de travessia da aresta requerida $e \in R$. Dessa maneira, o ARP é transformado em um equivalente NRP, em que o atendimento da

aresta requerida $e \in R$ do problema original (Figura 6) é representado por meio do atendimento a apenas um dos nós $i \in \{e', e''\} \subset X_1$ do problema transformado (Figura 7). Não há ligação entre os nós $e' \in X_1$ e $e'' \in X_1$, pois cada aresta requerida $e \in R$ deve receber, no máximo, um único atendimento a cada período p e em apenas um sentido.

Uma solução para o NRPTW definido sobre o grafo $G_1 = (X_1, A_1)$ (Figura 7) e considerando-se a inserção do nó artificial "0", é representada por meio das seguintes rotas:

$$\begin{aligned} \text{Período 1:} & \quad 0 \xrightarrow[8]{S} 1' \xrightarrow[8]{S} 3'' \xrightarrow[12]{S} 0 \\ \text{Período 2:} & \quad 0 \xrightarrow[6]{S} 1'' \xrightarrow[8]{S} 3' \xrightarrow[12]{S} \boxed{4'} \xrightarrow[14]{S} 2'' \xrightarrow[17]{S} 0 \end{aligned}$$

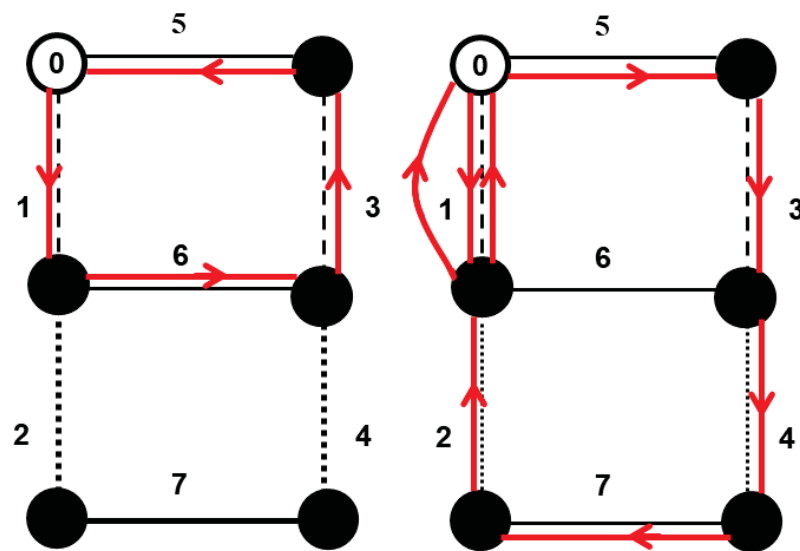
O deslocamento $i - j$ indica a travessia do arco $[i, j] \in A_1$ com $i \in X_1 \cup \{0\}$ e $j \in X_1 \cup \{0\}$. O valor abaixo de cada um dos nós $i \in X_1 \cup \{0\}$ indica o horário de saída do veículo do respectivo nó. O símbolo S sobre cada um dos nós representa a realização do atendimento. O valor que aparece dentro do retângulo abaixo do arco $[3', 4']$ indica que o veículo deve aguardar uma hora nesse arco. Destaca-se que nessa representação são considerados apenas os nós atendidos, com exceção do nó depósito.

As rotas apresentadas como solução do NRP representam, implicitamente, as rotas do equivalente ARP. O veículo deve partir do depósito, deslocar-se pelos caminhos de custo mínimo para a efetivação do primeiro atendimento, entre dois atendimentos consecutivos, e de retorno ao depósito. Desse modo, a solução do NRP representa a seguinte solução do problema original ARP.

$$\begin{aligned} \text{Período 1:} & \quad 0 \xrightarrow[8]{S} 1(\downarrow) \xrightarrow[8]{S} 6(\rightarrow) \xrightarrow[10]{S} 3(\uparrow) \xrightarrow[12]{S} 5(\leftarrow) \xrightarrow[13]{S} 0 \\ \text{Período 2:} & \quad 0 \xrightarrow[6]{S} 1(\downarrow) \xrightarrow[6]{S} 1(\uparrow) \xrightarrow[8]{S} 5(\rightarrow) \xrightarrow[10]{S} 3(\downarrow) \xrightarrow[12]{S} \boxed{4}(\downarrow) \xrightarrow[14]{S} 7(\leftarrow) \xrightarrow[16]{S} 2(\uparrow) \xrightarrow[17]{S} 1(\uparrow) \xrightarrow[18]{S} 0 \end{aligned}$$

O deslocamento $e(\cdot) - f(\cdot)$ representa, no problema original (Figura 6), a travessia da aresta $e \in E$, no sentido indicado dentro do parênteses, até o nó inicial da aresta $j \in E$ que deve ser atravessada posteriormente no sentido indicado dentro do parênteses. O valor abaixo de cada uma das arestas $e \in E$ indica o horário de saída do veículo do nó inicial da respectiva aresta que deve ser atravessada no sentido indicado dentro do parênteses. O símbolo S sobre cada uma das arestas requeridas $e \in R$ representa o atendimento no sentido indicado. O valor que aparece dentro do retângulo indica que veículo deve aguardar uma hora na aresta 3 antes do atendimento da aresta 4. A Figura 8 ilustra a rota que o veículo deve realizar sobre o grafo $G = (X, E)$ do problema original, em cada um dos períodos indicados.

FIGURA 8 – ROTAS SOBRE O GRAFO DO PROBLEMA ORIGINAL



FONTE: O Autor (2019).

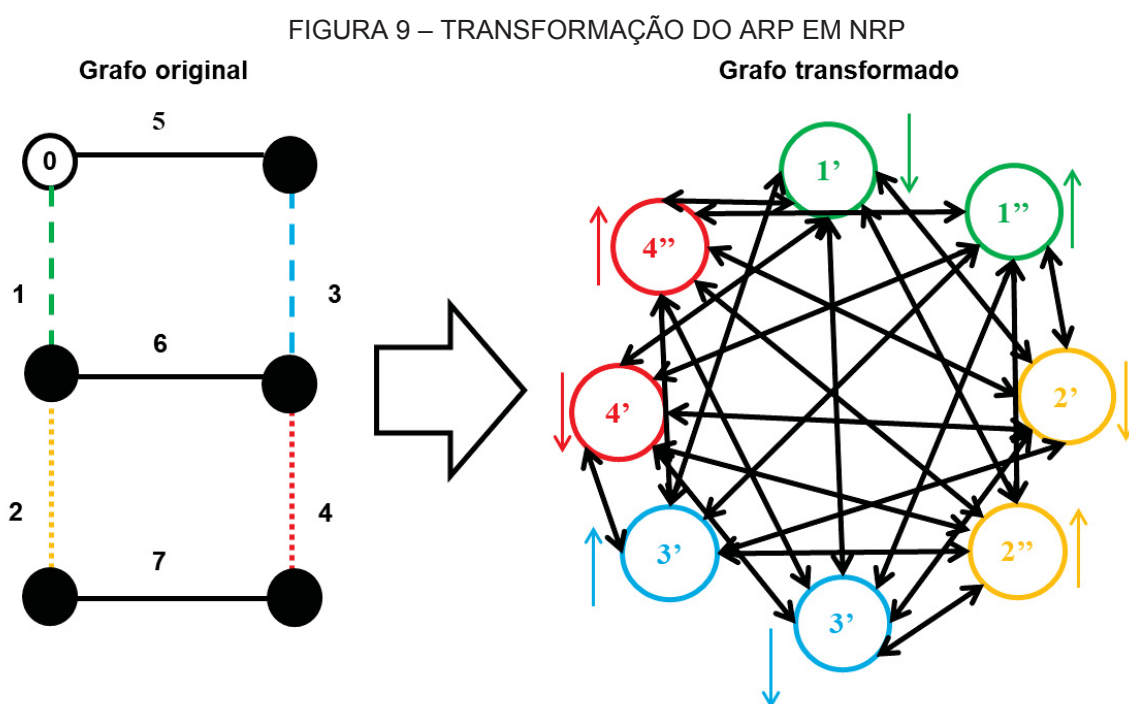
Sendo assim, a solução do NRP é equivalente à solução do ARP. Além disso, na solução do NRP, não há mais o problema de repetição de nós, pois as arestas requeridas são atendidas, no máximo, uma única vez a cada período.

As duas metodologias: 1) geração de nós e arestas artificiais; e 2) transformação do ARP em um equivalente NRP, foram testadas durante o desenvolvimento da presente tese e resultados computacionais mostraram maior eficiência da segunda metodologia (os testes realizados com a primeira metodologia podem ser vistos no trabalho de Thomaz *et al.* (2019, no prelo)). Dessa forma, nessa

tese, foi utilizada a segunda metodologia para a formulação matemática do PCARPTW.

4.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO 1

Nesta seção, é apresentada a formulação matemática para o PCARPTW baseada em Programação Linear Inteira Mista (PLIM). O grafo não direcionado do problema original $G=(X,E)$ é transformado no grafo direcionado $G_1=(X_1,A_1)$ (Figura 9).



FONTE: O Autor (2019).

As notações utilizadas na formulação matemática do problema PCARPTW são apresentadas na Tabela 11.

TABELA 11 – NOTAÇÕES UTILIZADAS NA FORMULAÇÃO DO PCARPTW

Símbolo	Definição
Índices e Conjuntos	
$i \in X_1$	conjunto de nós
$[i, j] \in A_1$	conjunto de arcos
$e \in R$	conjunto de arestas requeridas do problema original
$\{i, j\} \in N(e) \subset X_1$	conjunto de nós que representam os sentidos contrários de travessia da aresta requerida $e \in R$
$p \in P$	conjunto de períodos do horizonte de planejamento H
$v \in V$	conjunto de veículos
Parâmetros	
c_{ij}	custo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$
T_{ij}	tempo de travessia sobre o arco $[i, j] \in A_1$
W_v	capacidade máxima de carga do veículo v
$[a_e, b_e]$	janela de tempo da aresta requerida $e \in R$
$[a_0, b_0] = [0, 1000]$	janela de tempo do nó depósito
f_e	número de atendimentos que devem ser realizados na aresta requerida $e \in R$ e no horizonte de planejamento H
nc_e	número de distintas combinações de possíveis períodos de atendimento da aresta requerida $e \in R$
$C_{ekp} (nc_e \times P)$	matriz das combinações de possíveis períodos de atendimento para cada aresta requerida $e \in R$ ($C_{ekp} = 1$ se, e somente se, a combinação k contém o período p e $C_{ekp} = 0$, caso contrário)
$Q_{ekp} (nc_e \times P)$	demanda da aresta requerida $e \in R$ no período p da combinação k ($Q_{ekp} = 0$ se, e somente se, $C_{ekp} = 0$)
$M_{ij} = \max \{b_i + T_{ij} - a_j, 0\}$	número inteiro de grande valor
Variáveis de Decisão	
x_{ijvp}	variável binária que indica se o nó $j \in X_1 \cup \{0\}$ é visitado imediatamente após o nó $i \in X_1 \cup \{0\}$ pelo veículo v no período p
l_{ijvpk}	variável binária que indica se o nó $j \in X_1$ é atendido imediatamente após o nó $i \in X_1$ pelo veículo v no período p da combinação k
Z_{ek}	variável binária que indica se a combinação k é utilizada para o atendimento da aresta requerida $e \in R$
s_{ivp}	variável real que indica o horário de saída do veículo v do nó $i \in X_1 \cup \{0\}$ no período p

FONTE: O Autor (2019).

O problema é então formulado pelas expressões (30)-(42), denominado nesta tese como Modelo 1.

$$\min z = \sum_{i \in X_1 \cup \{0\}} \sum_{\substack{j \in X_1 \cup \{0\} \\ j \neq i, \{i,j\} \notin N(e)}} \sum_{v \in V} \sum_{p \in P} c_{ij} \cdot x_{ijvp} \quad (30)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{k=1}^{nc_e} Z_{ek} = 1 \quad \forall e \in R \quad (31)$$

$$\sum_{\substack{j \in X_1 / \\ \{i,j\} \notin N(e)}} x_{ijvp} = \sum_{\substack{j \in X_1 / \\ \{i,j\} \notin N(e)}} x_{jivp} \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\}, v \in V, p \in P \quad (32)$$

$$x_{ijvp} = \sum_{k=1}^{nc_e} l_{ijvpk} \quad \forall e \in R, i \in N(e), j \in X_1 \cup \{0\} / \{i,j\} \notin N(e), v \in V, p \in P \quad (33)$$

$$\sum_{i \in N(e)} \sum_{\substack{j \in X_1 \cup \{0\} / \\ \{i,j\} \notin N(e)}} \sum_{v \in V} l_{ijvpk} = C_{ekp} \cdot Z_{ek} \quad \forall e \in R, p \in P, k = 1, \dots, nc_e \quad (34)$$

$$\sum_{e \in R} \sum_{i \in N(e)} \sum_{\substack{j \in X_1 \cup \{0\} / \\ \{i,j\} \notin N(e)}} \sum_{k=1}^{nc_e} Q_{ekp} \cdot l_{ijvpk} \leq W_v \quad \forall v \in V, p \in P \quad (35)$$

$$\sum_{j \in X_1} x_{0jvp} \leq 1 \quad \forall v \in V, p \in P \quad (36)$$

$$\sum_{i \in X_1} x_{i0vp} \leq 1 \quad \forall v \in V, p \in P \quad (37)$$

$$s_{ivp} + T_{ij} - M_{ij} \cdot (1 - x_{ijvp}) \leq s_{jvp} \quad (38)$$

$$\forall i \in X_1 \cup \{0\}, j \in X_1 / \{i,j\} \notin N(e), v \in V, p \in P$$

$$a_e \leq s_{ivp} \quad \forall e \in R \cup \{0\}, i \in N(e), v \in V, p \in P \quad (39)$$

$$s_{ivp} \leq b_e \quad \forall e \in R \cup \{0\}, i \in N(e), v \in V, p \in P \quad (40)$$

$$x_{ijvp}, l_{ijvpk}, Z_{ek} \in \{0,1\} \quad (41)$$

$$\forall e \in R, i \in X_1 \cup \{0\}, j \in X_1 \cup \{0\} / i \neq j, \{i,j\} \notin N(e), v \in V, p \in P, k = 1, \dots, nc_e$$

$$s_{ivp} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\}, v \in V, p \in P \quad (42)$$

A função (30) minimiza o custo total das travessias. O conjunto de restrições (31) garante que, para o atendimento da aresta requerida $e \in R$, é utilizada apenas

uma das nc_e combinações de possíveis períodos de atendimento. O conjunto de restrições (32) garante a continuidade de fluxo dos veículos ao longo do trajeto. O conjunto de restrições (33) garante que todo nó $i \in X_1$ visitado seja também atendido. O conjunto de restrições (34) garante que o atendimento da aresta requerida $e \in R$, no período p , só pode ser realizado por apenas um veículo v e em um único sentido. O conjunto de restrições (35) garante que a capacidade de carga W_v do veículo v não seja excedida a cada período p . Os conjuntos de restrições (36) e (37) garantem que todo trajeto deve iniciar e terminar no depósito.

Os conjuntos de restrições (38), (39) e (40) são utilizados para incorporar as janelas de tempo ao problema. O conjunto (38) é utilizado para cronometrar o horário de partida do veículo v de cada um dos nós $i \in X_1 \cup \{0\}$ no período p , além de evitar a formação de subciclos. Se $x_{ijvp} = 1$, então, $M_{ij}(1 - x_{ijvp}) = 0$ e $s_{ivp} + T_{ij} \leq s_{jvp}$, ou seja, o horário de partida do veículo v , do nó $j \in X_1$, deve ser após o horário de saída do nó $i \in X_1 \cup \{0\}$ mais o tempo de passagem sobre o arco $[i, j] \in A_1$. Ademais, esse conjunto de restrições também permite esperas, caso o veículo v chegue com antecedência ao horário de abertura de uma janela de tempo seguinte.

Por outro lado, se $x_{ijvp} = 0$, o conjunto de restrições é sempre satisfeito, pois $M_{ij} = \max\{b_i + T_{ij} - a_j, 0\}$ é uma constante suficientemente grande. Nessa situação, tem-se $s_{ivp} + T_{ij} - M_{ij} \leq s_{jvp}$. As janelas de tempo dos nós $i \in X_1 \cup \{0\}$ e $j \in X_1 \cup \{0\}$ são $[a_i, b_i]$ e $[a_j, b_j]$, respectivamente, o que significa que $a_i \leq s_{ivp} \leq b_i$ e $a_j \leq s_{jvp} \leq b_j$. Considerando o valor de $M_{ij} = b_i + T_{ij} - a_j$ tem-se que a desigualdade $s_{ivp} + T_{ij} - M_{ij} \leq s_{jvp}$ é sempre satisfeita, pois:

$$\begin{aligned}
s_{ivp} \leq b_i &\Rightarrow s_{ivp} + T_{ij} \leq b_i + T_{ij} \Rightarrow \\
s_{ivp} + T_{ij} - \overbrace{(b_i + T_{ij} - a_j)}^{M_{ij}} &\leq b_i + T_{ij} - \overbrace{(b_i + T_{ij} - a_j)}^{M_{ij}} \Rightarrow \\
s_{ivp} + T_{ij} - \overbrace{(b_i + T_{ij} - a_j)}^{M_{ij}} &\leq a_j \leq s_{jvp}
\end{aligned}$$

Se $M_{ij} \leq 0$ então $-M_{ij} \geq 0$, logo $s_{ivp} + T_{ij} \leq s_{ivp} + T_{ij} - M_{ij} \leq a_j \leq s_{jvp}$, ou seja, no caso de $M_{ij} \leq 0$ pode-se considerar $M_{ij} = 0$ que a desigualdade $s_{ivp} + T_{ij} - M_{ij} \leq s_{jvp}$ sempre será satisfeita. Dessa forma, $M_{ij} = \max\{b_i + T_{ij} - a_j, 0\}$ garante que $s_{ivp} + T_{ij} - M_{ij} \leq a_j \leq s_{jvp}$.

Os conjuntos de restrições (39) e (40) garantem que o atendimento sobre a aresta requerida $e \in R$ se inicie dentro da janela de tempo $[a_e, b_e]$, independente do sentido em que é realizado. O conjunto (39) garante que o atendimento se inicie no mínimo no instante a_e e o conjunto (40) garante que o atendimento se inicie no máximo no instante b_e . Além disso, os conjuntos de restrições garantem que o horário de saída e retorno ao depósito seja dentro da janela de tempo $[a_0, b_0]$.

Os conjuntos de restrições (41) e (42) garantem que as variáveis x_{ijvp} , l_{ijvpk} e Z_{ik} são binárias; e s_{ivp} são reais.

Os conjuntos de restrições (31)-(35) foram adaptados do trabalho dos autores Chu, Labadi e Prins (2005). Por outro lado, os conjuntos de restrições (36)-(40) foram adaptados de Mullaseril (1996) e Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014).

4.4 DESIGUALDADES VÁLIDAS

Os principais *softwares* de otimização disponíveis atualmente, como, por exemplo, CPLEX e GUROBI, são baseados no método exato de solução *branch-and-bound* e algoritmos de corte. Apesar de que os cortes gerados pelo *software* tenham gerado bons resultados, recorrer a cortes específicos para o problema que se pretende resolver pode contribuir significativamente para melhor desempenho do *software*. Conforme observado em diversos trabalhos na literatura, desigualdades

válidas têm sido determinantes para obtenção de algoritmos de plano de corte utilizados como estratégia de resolução para os ARPTW (LETCHEFORD; EGLESE, 1998; TAN; SUN, 2011; TAN; SUN; HOU, 2013; MONROY-LICHT; AMAYA; LANGEVIN, 2014; SUN; MENG; TAN, 2015). Nesta seção, são apresentados um conjunto de desigualdades válidas e uma formulação matemática com as desigualdades válidas. As desigualdades válidas aqui apresentadas são específicas para o problema em estudo e válidas para a formulação matemática (30)-(42) (Modelo 1) mantendo a factibilidade de uma solução ótima.

4.4.1 Adaptações e Propostas de Novas Desigualdades Válidas

Os conjuntos de restrições (43) e (44) são propostas da presente tese e garantem diretamente que um veículo v deve sair do depósito e a ele retornar, caso atenda qualquer nó $j \in X_1$ no período p , e são desigualdades válidas para o Modelo 1.

$$\sum_{i \in X_1} x_{0ivp} \geq x_{jlv p} \quad \forall j \in X_1, l \in X_1 \cup \{0\} / \{j, l\} \notin N(e), v \in V, p \in P \quad (43)$$

$$\sum_{i \in X_1} x_{i0vp} \geq x_{jlv p} \quad \forall j \in X_1 \cup \{0\}, l \in X_1 / \{j, l\} \notin N(e), v \in V, p \in P \quad (44)$$

Os conjuntos de restrições (45) e (46) foram adaptados de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) e Desrochers e Laporte (1991) e são utilizados para fortalecer as restrições de janela de tempo. Sejam $a_{ji} = \max\{0, a_e - a_f + T_{ji}\}$ e $b_{ij} = \max\{0, b_f - b_e + T_{ij}\}$, então, as desigualdades:

$$a_f + \sum_{\substack{e \in R / \\ e \neq f}} \sum_{j \in N(e)} a_{ji} \cdot x_{jiv p} \leq s_{iv p} \quad \forall f \in R, i \in N(f), v \in V, p \in P \quad (45)$$

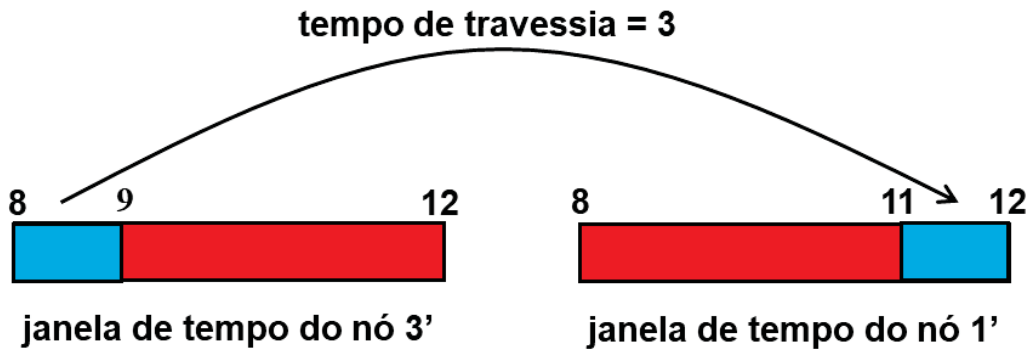
$$b_f - \sum_{\substack{e \in R / \\ e \neq f}} \sum_{j \in N(e)} b_{ij} \cdot x_{ijv p} \geq s_{iv p} \quad \forall f \in R, i \in N(f), v \in V, p \in P \quad (46)$$

são válidas para o Modelo 1.

Para exemplificar as desigualdades válidas (45) e (46), utiliza-se o grafo ilustrado na Figura 6. Suponha-se que o veículo v , em algum período p , realize

primeiramente o atendimento da aresta requerida $3 \in R$ no sentido (\downarrow) e, na sequência, atenda à aresta requerida $1 \in R$ no sentido (\downarrow) . Dessa forma, considerando-se o grafo modificado ilustrado na Figura 7 tem-se que o deslocamento para a efetivação dos atendimentos deve ser realizado por meio do arco $[3', 1']$. Logo, tem-se $x_{3'1'vp} = 1$ e os seguintes valores dos parâmetros $a_{3'1'} = \max\{0, a_3 - a_1 + T_{3'1'}\} = \max\{0, 8 - 8 + 3\} = 3$ e $b_{3'1'} = \max\{0, b_3 - b_1 + T_{3'1'}\} = \max\{0, 12 - 12 + 3\} = 3$. Desse modo, por (45) e (46), tem-se que $s_{1'} \geq 11$ e $s_{3'} \leq 9$, ou seja, o veículo deve atender ao nó $3'$, no máximo, às 9 horas, para posteriormente atender ao nó $1'$, no mínimo, às 11 horas. Assim sendo, a janela de tempo do nó $3'$ deixa de ser $[8, 12]$ e passa a ser $[8, 9]$, e a janela de tempo do nó $1'$ passa de $[8, 12]$ para $[11, 12]$ (Figura 10).

FIGURA 10 – ILUSTRAÇÃO DAS DESIGUALDADES VÁLIDAS 45 E 46



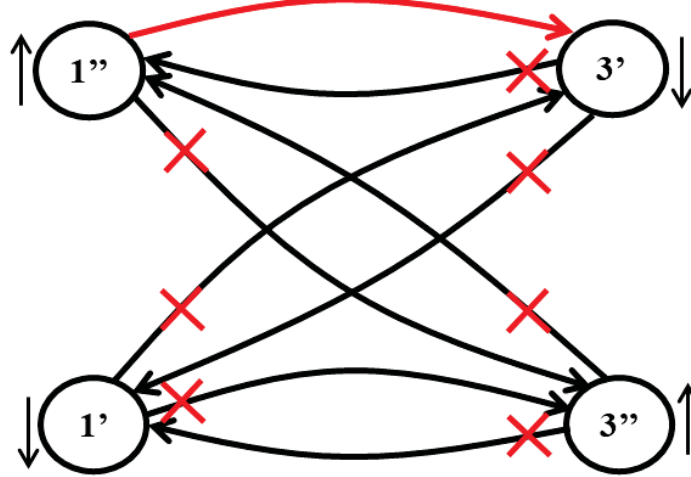
FONTE: O Autor (2019).

Além disso, duas arestas requeridas, $e \in R$ e $f \in R$, podem ser conectadas por oito caminhos diferentes. O conjunto de restrições (47) garante que, no período, apenas um desses caminhos seja utilizado para o atendimento sequencial das respectivas arestas, e são desigualdades válidas para o Modelo 1 e propostas desta tese.

$$\sum_{i \in N(e)} \sum_{j \in N(f)} (x_{ijvp} + x_{jivp}) \leq 1 \quad \forall e \in R, f \in R / e \neq f, v \in V, p \in P \quad (47)$$

Supondo que, no período p , as arestas requeridas $1 \in R$ e $3 \in R$ do grafo original (Figura 6) sejam atendidas sequencialmente por meio do arco $[1'', 3']$ do grafo transformado (Figura 7), então, os demais arcos que representam os diferentes caminhos que conectam essas duas arestas requeridas são eliminados, como ilustrado na Figura 11.

FIGURA 11 – ILUSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE VÁLIDA 47



FONTE: O Autor (2019).

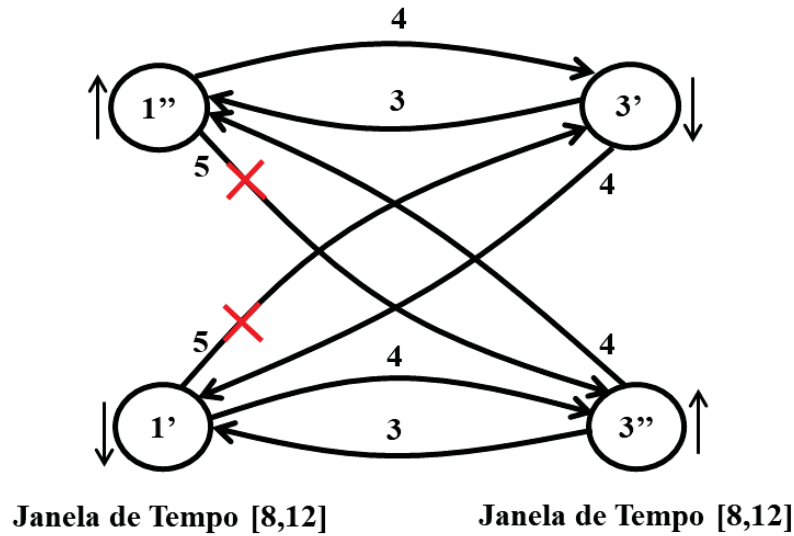
O conjunto de restrições (48) elimina a possibilidade do veículo v , em qualquer período p , atender o nó $j \in X_1$ imediatamente após o nó $i \in X_1 \cup \{0\}$, caso não seja possível atender ao nó j dentro da sua respectiva janela de tempo. Essa igualdade é válida para o Modelo 1 e proposta da presente tese.

$$x_{ijvp} = 0 \quad (48)$$

$$\forall e \in R, f \in R / (e \neq f, i \in N(e) \cup \{0\}, j \in N(f), a_e + T_{ij} - b_f > 0), v \in V, p \in P$$

A Figura 12 ilustra o conjunto de restrições (48), mostrando que não é possível atender, consecutivamente, às arestas requeridas $1 \in R$ e $3 \in R$ do grafo original (Figura 6) por meio dos arcos $[1', 3']$ e $[1'', 3'']$ do grafo transformado (Figura 7), pois $a_1 + T_{1'3'} = 8 + 5 = 13 > 12 = b_3$ e $a_1 + T_{1''3''} = 8 + 5 = 13 > 12 = b_3$, ou seja, considerando os caminhos indicados, o horário de chegada do veículo na aresta requerida $3 \in R$ supera o horário de fechamento da janela de tempo.

FIGURA 12 – ILUSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE VÁLIDA 48



FONTE: O Autor (2019).

4.5 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO 2

Para a formulação matemática com desigualdades válidas, os conjuntos de restrições (45) e (46) são inseridos no Modelo 1, no lugar dos conjuntos de restrições (39) e (40), pois são mais fortes. Ademais, os conjuntos de restrições (43), (44), (47) e (48) são incorporados ao Modelo 1, pois garantem, diretamente, que o veículo saia do depósito e retorne a ele, e eliminam algumas possibilidades de deslocamentos.

Dessa forma, é apresentada a formulação matemática com desigualdades válidas representada pelas expressões (30)-(38) e (41)-(48), denominada nesta tese como Modelo 2.

$$\min z = \sum_{i \in X_1 \cup \{0\}} \sum_{\substack{j \in X_1 \cup \{0\} \\ j \neq i, \{i,j\} \notin N(e)}} \sum_{v \in V} \sum_{p \in P} c_{ij} \cdot x_{ijvp} \quad (30)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{k=1}^{nc_e} Z_{ek} = 1 \quad \forall e \in R \quad (31)$$

$$\sum_{\substack{j \in X_1 / \\ \{i,j\} \notin N(e)}} x_{ijvp} = \sum_{\substack{j \in X_1 / \\ \{i,j\} \notin N(e)}} x_{jivp} \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\}, v \in V, p \in P \quad (32)$$

$$x_{ijvp} = \sum_{k=1}^{nc_e} l_{ijvpk} \quad \forall e \in R, i \in N(e), j \in X_1 \cup \{0\} / \{i, j\} \notin N(e), v \in V, p \in P \quad (33)$$

$$\sum_{i \in N(e)} \sum_{j \in X_1 \cup \{0\} / \{i, j\} \notin N(e)} \sum_{v \in V} l_{ijvpk} = C_{ekp} \cdot Z_{ek} \quad \forall e \in R, p \in P, k = 1, \dots, nc_e \quad (34)$$

$$\sum_{e \in R} \sum_{i \in N(e)} \sum_{j \in X_1 \cup \{0\} / \{i, j\} \notin N(e)} \sum_{k=1}^{nc_e} Q_{ekp} \cdot l_{ijvpk} \leq W_v \quad \forall v \in V, p \in P \quad (35)$$

$$\sum_{j \in X_1} x_{0jvp} \leq 1 \quad \forall v \in V, p \in P \quad (36)$$

$$\sum_{i \in X_1} x_{i0vp} \leq 1 \quad \forall v \in V, p \in P \quad (37)$$

$$s_{ivp} + T_{ij} - M_{ij} \cdot (1 - x_{ijvp}) \leq s_{jvp} \quad (38)$$

$$\forall i \in X_1 \cup \{0\}, j \in X_1 / \{i, j\} \notin N(e), v \in V, p \in P$$

$$\sum_{i \in X_1} x_{0ivp} \geq x_{jlv} \quad \forall j \in X_1, l \in X_1 \cup \{0\} / \{j, l\} \notin N(e), v \in V, p \in P \quad (43)$$

$$\sum_{i \in X_1} x_{i0vp} \geq x_{jlv} \quad \forall j \in X_1 \cup \{0\}, l \in X_1 / \{j, l\} \notin N(e), v \in V, p \in P \quad (44)$$

$$a_f + \sum_{\substack{e \in R / \\ e \neq f}} \sum_{j \in N(e)} a_{ji} \cdot x_{jivp} \leq s_{ivp} \quad \forall f \in R, i \in N(f), v \in V, p \in P \quad (45)$$

$$b_f - \sum_{\substack{e \in R / \\ e \neq f}} \sum_{j \in N(e)} b_{ij} \cdot x_{ijvp} \geq s_{ivp} \quad \forall f \in R, i \in N(f), v \in V, p \in P \quad (46)$$

$$\sum_{i \in N(e)} \sum_{j \in N(f)} (x_{ijvp} + x_{jivp}) \leq 1 \quad \forall e \in R, f \in R / e \neq f, v \in V, p \in P \quad (47)$$

$$x_{ijvp} = 0 \quad (48)$$

$$\forall e \in R, f \in R / (e \neq f, i \in N(e) \cup \{0\}, j \in N(f), a_e + T_{ij} - b_f > 0), v \in V, p \in P$$

$$x_{ijvp}, l_{ijvpk}, Z_{ek} \in \{0, 1\} \quad (41)$$

$$\forall e \in R, i \in X_1 \cup \{0\}, j \in X_1 \cup \{0\} / i \neq j, \{i, j\} \notin N(e), v \in V, p \in P, k = 1, \dots, nc_e$$

$$s_{ivp} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in X_1 \cup \{0\}, v \in V, p \in P \quad (42)$$

As desigualdades válidas aqui apresentadas são aquelas que apresentaram os resultados mais notáveis, em relação à melhora dos limitantes inferiores, quando resolvida a relaxação linear do Modelo 1 (formulação matemática (30)-(42)). Para

tanto, as variáveis de decisão x_{ijvp} , l_{ijvpk} e Z_{ek} foram consideradas reais e definidas como $0 \leq x_{ijvp} \leq 1$, $0 \leq l_{ijvpk} \leq 1$ e $0 \leq Z_{ek} \leq 1$. A Tabela 12 apresenta para cinco instâncias, os valores ótimos obtidos quando resolvidas as relaxações lineares dos Modelos 1 e 2, além do valor obtido quando resolvida a formulação matemática baseada em PLIM.

TABELA 12 – RESOLUÇÃO DA RELAXAÇÃO LINEAR DOS MODELOS 1 E 2

Instância	Relaxação do Modelo 1	Relaxação do Modelo 2	PLIM
TW-B13C26-P	52	52	87
TW-B20B14-P	132	132	187
TW-B20B17-P	323	347,666	412
TW-B40C214-P	577	594,714	697
TW-C40C148-P	400,25	430,454	[522,567]

FONTE: O Autor (2019).

Pode-se observar na Tabela 12 que para as duas primeiras instâncias, os valores ótimos obtidos na resolução da relaxação linear dos Modelos 1 e 2 são iguais. Por outro lado, para as três últimas instâncias, o valor obtido na resolução da relaxação linear do Modelo 2 está mais próximo do valor obtido na resolução da formulação baseada em PLIM do que o resultado encontrado com o Modelo 1. Dessa forma, foram aqui utilizadas as desigualdades válidas que apresentaram os melhores resultados em relação a melhora dos limitantes inferiores quando resolvida a relaxação linear do Modelo 1.

5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentadas as origens, as adaptações e as características das instâncias utilizadas nos testes computacionais, além dos resultados obtidos com o método exato de solução sobre as duas formulações matemáticas propostas nesta tese, o Modelo 1 e o Modelo 2. Ademais, é apresentada uma comparação dos resultados obtidos na resolução das duas formulações matemáticas.

5.1 VALIDAÇÃO DOS MODELOS 1 E 2

Para validar os Modelos 1 e 2, foi utilizado um conjunto de 225 instâncias para o RPPTW, proposto por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). As características das instâncias e os resultados obtidos na validação são apresentados em detalhes no APÊNDICE. Além disso, com o objetivo de comparações iniciais, as formulações matemáticas para o PCARPTW (Modelos 1 e 2) foram reduzidas a formulações para o RPPTW. Para isso, é considerado o horizonte de planejamento com um único período ($P = 1$), e a frota com apenas um veículo ($V = 1$), em que a capacidade de carga é suficiente para atender a todas as arestas requeridas.

Os Modelos 1 e 2, aqui propostos, e a formulação matemática sobre arestas requeridas para o RPPTW, proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) (Seção 3.1), foram implementados em *VisualBasic.NET*, utilizando como *solver* o *software* de otimização *GUROBI* 8.0.0, com parâmetros *default*, em um computador *Intel Core I7* com 2.4 GHz de processamento e 8 Gb de memória RAM e sistema operacional de 64 bits. O tempo máximo de processamento estabelecido durante a validação foi de 1800 segundos para cada uma das instâncias.

A Tabela 13 apresenta o desempenho do *solver* sobre as 225 instâncias utilizadas na validação, quando considerada cada uma das formulações matemáticas:

- Monroy-Licht *et al.* (2014);
- Modelo 1;
- Modelo 2.

As soluções encontradas foram classificadas da seguinte forma:

- Solução ótima: instância resolvida até a otimalidade, ou seja, $GAP = 0$;
- solução factível: instância em que foi encontrada solução factível, mas a otimalidade não foi comprovada durante o tempo máximo de processamento, ou seja, $GAP \neq 0$;
- Solução não factível: instância em que não foi encontrada solução factível durante o tempo máximo de processamento.

TABELA 13 – RESULTADOS SOBRE AS FORMULAÇÕES: MONROY-LICHT ET AL. (2014) E MODELOS 1 E 2

Classificação	Monroy-Licht <i>et al.</i> (2014)	Modelo 1	Modelo 2
Solução ótima	220	220	222
Solução factível	2	4	2
Solução não factível	3	1	1
Total	225	225	225

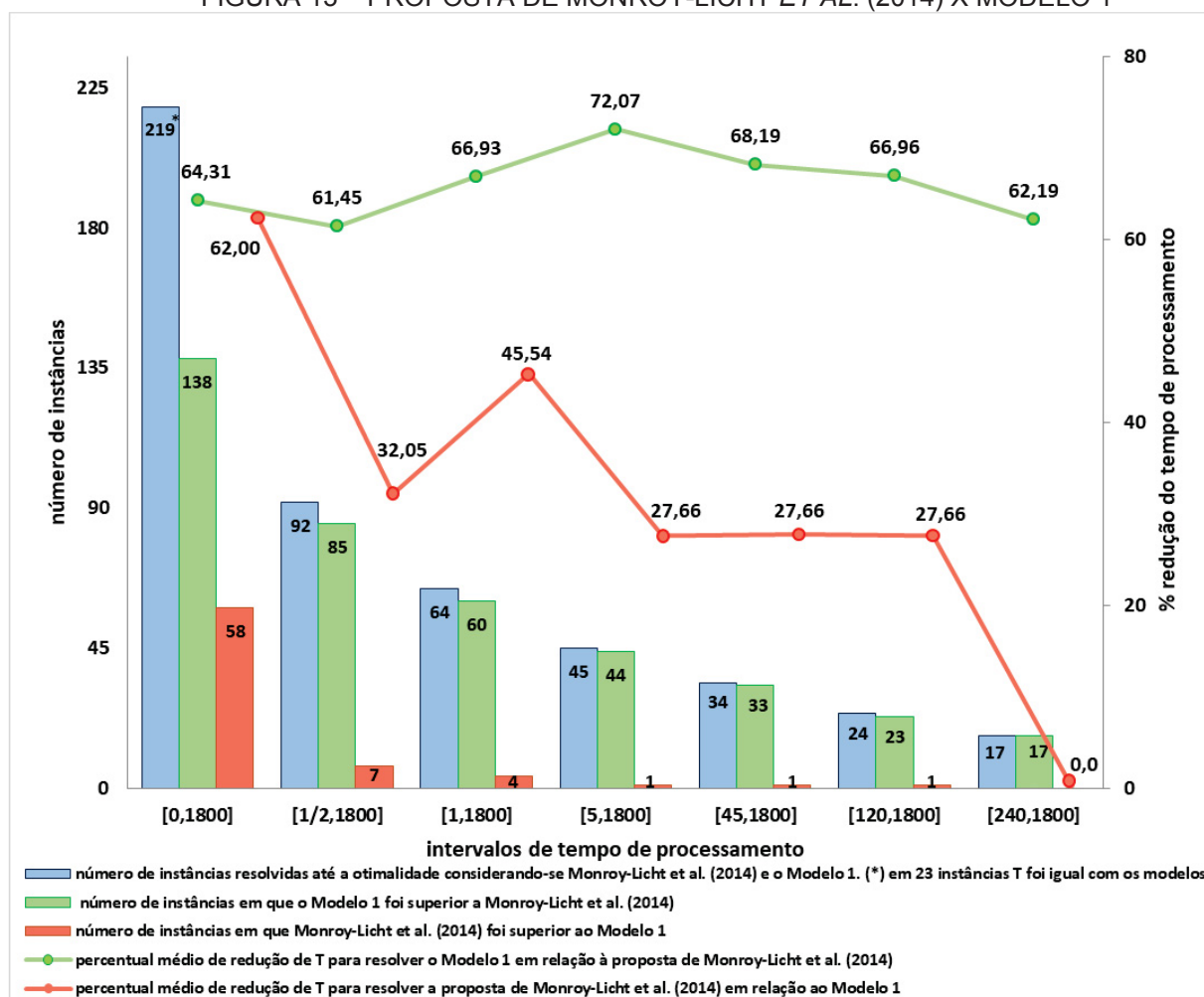
FONTE: O Autor (2019).

A Tabela 13 indica que os Modelos 1 e 2 tendem a ser superiores em relação à formulação matemática para o RPPTW proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), pois, utilizando esses modelos foi possível encontrar um número maior de soluções ótimas e factíveis.

Para efeito de comparações dos resultados alcançados sobre cada uma das formulações matemáticas, é aqui realizada uma análise mais detalhada. As Figuras 13 e 14 apresentam comparativos dos resultados alcançados com o *solver GUROBI* na resolução da formulação matemática para o RPPTW (Monroy-Licht *et al.*, 2014) com os resultados obtidos na resolução dos Modelos 1 e 2, respectivamente. As análises são realizadas de acordo com o tempo de processamento utilizado pelo *solver* para obtenção de uma solução ótima. Para isso, são considerados sete intervalos de tempo de processamento (em segundos): $[0,1800]$, $\left[\frac{1}{2},1800\right]$, $[1,1800]$, $[5,1800]$, $[45,1800]$, $[120,1800]$ e $[240,1800]$, gerando assim, sete cenários. Para cada um dos cenários são designadas as instâncias resolvidas até a otimalidade e, em tempo de processamento dentro do intervalo indicado. Como aqui o objetivo é comparar os resultados alcançados com a formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) com os resultados obtidos com

os Modelos 1 e 2, são designadas para cada um dos cenários, as instâncias resolvidas em tempo de processamento dentro do intervalo indicado, considerando-se apenas, a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), e não necessariamente os Modelos 1 e 2, podendo com esses dois modelos, as instâncias designadas serem resolvidas em tempo de processamento menor que o limitante inferior do intervalo indicado. Os intervalos de tempo de processamento estão indicados no eixo horizontal das Figuras 13 e 14.

FIGURA 13 – PROPOSTA DE MONROY-LICHT *ET AL.* (2014) X MODELO 1



FONTE: O Autor (2019).

A Figura 13 apresenta comparações dos resultados alcançados com a formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) com os resultados obtidos com o Modelo 1. As colunas azuis indicam o número de instâncias que foram resolvidas até a otimalidade, considerando-se, simultaneamente a formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) e o Modelo 1. Além disso, ressalta-se, que o intervalo de tempo de

processamento considerado em cada um dos cenários refere-se apenas ao tempo de processamento para a obtenção das soluções ótimas com a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), mas não necessariamente com o Modelo 1. Um exemplo disso é o caso da instância TW-A10A98 (vide APÊNDICE), designada para os dois primeiros cenários, pois essa instância foi resolvida até a otimalidade e em tempo de processamento de 0,70 segundos quando considerada a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), logo $0,70 \in [0,1800]$ e $0,70 \in \left[\frac{1}{2}, 1800\right]$. Por outro lado, essa instância foi resolvida em 0,41 segundos quando considerado o Modelo 1 e, $0,41 \in [0,1800]$, mas $0,41 \notin \left[\frac{1}{2}, 1800\right]$.

As colunas verdes exibem o número de instâncias em que o Modelo 1 foi superior³ a formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Por outro lado, as colunas vermelhas mostram o número de instâncias em que a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) foi superior ao Modelo 1. Para as instâncias em que o Modelo 1 foi superior a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), a curva verde exibe o percentual médio de redução do tempo de processamento (T) utilizado pelo *solver* para obtenção de uma solução ótima. Por outro lado, considerando as instâncias em que a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) foi superior ao Modelo 1, a curva vermelha mostra o percentual médio de redução do tempo de processamento para a obtenção de uma solução ótima.

Para contabilizar os números de instâncias apresentados nas colunas verdes e vermelhas foram consideradas apenas as instâncias em que um dos dois modelos foi estritamente superior ao outro. No caso das 219 instâncias que foram resolvidas até a otimalidade e em tempo de processamento dentro do intervalo de segundos $[0,1800]$, tem-se que o Modelo 1 foi superior à proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) sobre 138 instâncias e inferior sobre outras 58 instâncias, o que significa que sobre 23 instâncias o desempenho do *solver* foi o mesmo com os dois modelos.

³ Termo utilizado para apontar que o tempo de processamento utilizado pelo *solver* para obtenção de uma solução ótima foi menor com a referida formulação.

A Tabela 14 apresenta o desempenho do *solver* sobre as 6 instâncias resolvidas até o tempo máximo de processamento, utilizando-se, como formulação matemática para o RPPTW, a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) ou o Modelo 1.

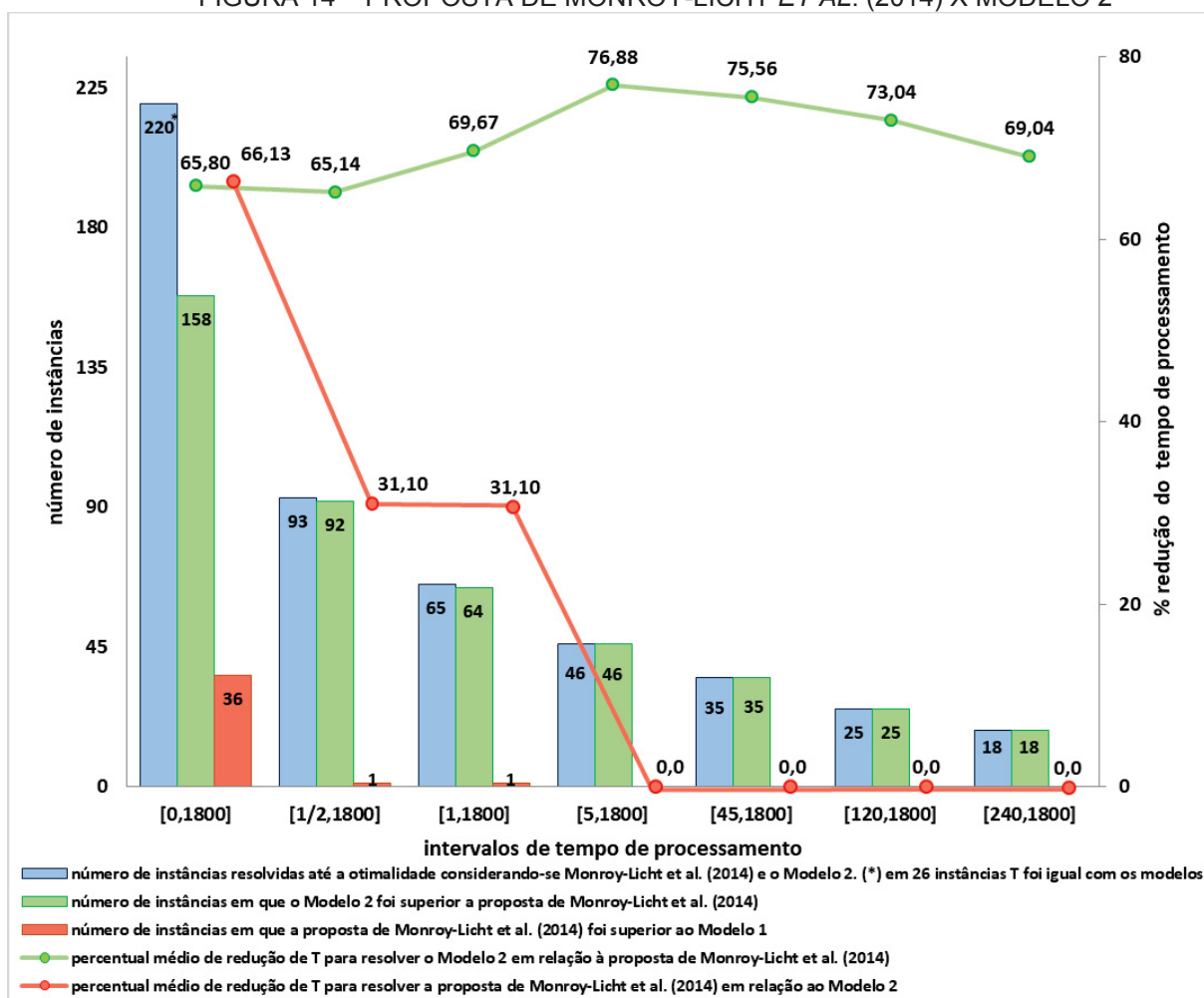
TABELA 14 – RESULTADOS SOBRE INSTÂNCIAS RESOLVIDAS ATÉ O TEMPO MÁXIMO DE PROCESSAMENTO

Classificação	Monroy-Licht <i>et al.</i> (2014)	Modelo 1
Solução ótima	1	1
Solução factível	2	4
Solução não factível	3	1
Total	6	6

FONTE: O Autor (2019).

A Figura 14 apresenta uma comparação dos resultados obtidos com a formulação matemática para o RPPTW proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) com os resultados encontrados com o Modelo 2. As colunas azuis exibem o número de instâncias resolvidas até a otimalidade, levando em consideração a formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) e o Modelo 2. O intervalo de tempo de processamento considerado no respectivo cenário refere-se ao tempo de processamento para a obtenção de uma solução ótima para a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) e não para o Modelo 2, como nos comparativos apresentados na Figura 13. Um exemplo disso é o caso da instância TW-A10A98 (vide APÊNDICE) designada para os dois primeiros cenários e, resolvida até a otimalidade em 0,70 segundos quando considerada a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) e, em 0,30 segundos quando considerado o Modelo 2, mas $0,30 \in [0,1800]$ e $0,30 \notin \left[\frac{1}{2}, 1800\right]$.

As colunas verdes mostram o número de instâncias em que o Modelo 2 foi superior à formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) e, para essas instâncias, a curva verde apresenta o percentual médio de redução do tempo de processamento para obtenção de uma solução ótima. Já as colunas vermelhas apresentam o número de instâncias em que a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) foi superior ao Modelo 2 e, considerando apenas essas instâncias, a curva vermelha mostra o percentual médio de redução do tempo de processamento para obtenção de uma solução ótima.

FIGURA 14 – PROPOSTA DE MONROY-LICHT *ET AL.* (2014) X MODELO 2

FONTE: O Autor (2019).

A Tabela 15 apresenta a classificação das soluções encontradas sobre as 5 instâncias resolvidas até o tempo máximo de processamento, utilizando-se, como formulação matemática para o RPPTW, a proposta de Monroy-Licht *et al.* (2014) ou o Modelo 2.

TABELA 15 – CLASSIFICAÇÃO DAS INSTÂNCIAS RESOLVIDAS ATÉ O TEMPO MÁXIMO DE PROCESSAMENTO

Classificação	Monroy-Licht <i>et al.</i> (2014)	Modelo 2
Solução ótima	0	2
Solução factível	2	2
Solução não factível	3	1
Total	5	5

FONTE: O Autor (2019).

Os resultados ilustrados nas Figuras 13 e 14 apontam que os Modelos 1 e 2 são capazes de gerar ganhos em relação à formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), em especial, sobre as instâncias com maior complexidade de resolução para o *solver*. Considerando-se, na Figura 13, as 219 instâncias que foram resolvidas até a otimalidade, tem-se que, sobre 138 instâncias, o Modelo 1 foi superior à formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), em que o tempo de processamento utilizado pelo *solver* reduziu em média 64,31%. Já sobre 58 instâncias, em que a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) foi superior ao Modelo 1, o tempo de processamento reduziu em média 62%. Por outro lado, sobre 92 instâncias mais complexas, resolvidas em tempo de processamento maior ou igual à meio segundo, tem-se que o Modelo 1 foi superior sobre 85 instâncias, em que o tempo de processamento reduziu em média 61,45%, já a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) foi superior ao Modelo 1 sobre 7 instâncias apenas, em que o tempo de processamento reduziu, em média, 32,05%.

Considerando-se, na Figura 14, as 220 instâncias resolvidas até a otimalidade, tem-se que, sobre 158 instâncias, o Modelo 2 foi superior à formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), em que o tempo de processamento utilizado pelo *solver* reduziu em média 65,80%. Sobre outras 36 instâncias, em que a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) foi superior ao Modelo 2, o tempo de processamento reduziu em média 66,13%. Por outro lado, sobre 93 instâncias, resolvidas pelo *solver* em tempo de processamento superior ou igual à meio segundo, tem-se que o Modelo 2 foi superior sobre 92 instâncias, em que o tempo de processamento reduziu em média 65,14%, e a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) foi superior sobre uma instância em que o tempo de processamento reduziu 31,10%.

Levando em consideração os resultados de tempo de processamento utilizado pelo *solver* para obtenção de uma solução ótima, valor da função objetivo e, GAP, nessa mesma ordem de importância, pode-se concluir que o desempenho do *solver* sobre o Modelo 1 é superior ou igual ao desempenho sobre a formulação matemática proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) em 73,33% das instâncias e, inferior em 26,67% das instâncias. Já em relação ao comparativo do Modelo 2 com a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014), tem-se que, sobre o Modelo 2, o desempenho do *solver* é superior ou igual ao desempenho

sobre a formulação proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) em 83,56% das instâncias e inferior em 16,44% das instâncias.

5.2 GERAÇÃO DAS INSTÂNCIAS PARA O PCARPTW

Para analisar o desempenho do *solver* sobre os Modelos 1 e 2, foram adaptadas 105 instâncias do RPPTW de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) para o PCARPTW. Para gerar as dimensões das instâncias para o PCARPTW foram considerados valores aleatórios uniformemente distribuídos sobre os intervalos indicados. A definição dos intervalos se deu por meio de testes preliminares ao longo do desenvolvimento desta tese. Os testes apontaram limitantes em que é possível tratar o problema com o *solver GUROBI*. Para adaptar as 105 instâncias foram considerados: número de períodos do horizonte de planejamento (Uniforme(1,5)) para cada uma das instâncias; produção diária de lixo por aresta requerida (Uniforme(100,300)) para cada uma das instâncias; número de veículos (Uniforme(1,4)) para cada uma das instâncias; número de atendimentos que devem ser realizados em cada uma das arestas requeridas (Uniforme(1,número de períodos do horizonte de planejamento)); número de combinações de possíveis períodos de atendimento por aresta requerida (Uniforme(1,número de períodos do horizonte de planejamento)); capacidade de carga (Uniforme(produção diária de lixo por aresta requerida, número de períodos x produção diária x número de arestas requeridas)) para cada um dos veículos considerados na instância. As características de cada uma das instâncias são apresentadas nas Tabelas 15-17.

Para determinar os valores uniformemente distribuídos no intervalo (a,b) foi gerado um número aleatório $x \in [0,1]$ e a dimensão gerada é $y = \lfloor a + (b-a) \cdot x \rfloor$, em que $\lfloor \cdot \rfloor$ é a função menor inteiro. Por exemplo, o número de períodos do horizonte de planejamento para cada uma das instâncias foi considerado no intervalo $(1,5)$, supondo que seja gerado aleatoriamente o número $x = 0,2$, então o número de períodos considerado para a instância é $P = \lfloor 1 + (5-1) \cdot 0,2 \rfloor = \lfloor 1,8 \rfloor = 1$.

5.3 RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DO PCARPTW

As 105 instâncias adaptadas para o PCARPTW foram separadas em três grupos, de acordo com a classificação de janelas de tempo realizada por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2017): justas (Tabela 16), intermediárias (Tabela 17) e largas (Tabela 18). Destaca-se que as instâncias adaptadas possuem a letra P ao final do nome, por exemplo, a instância TW-A10A90-P (Tabela 16) é a adaptação da instância TW-A10A90 (Tabela 21) proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Além das características das instâncias, as tabelas apresentam os resultados obtidos quando cada um dos Modelos 1 e 2 foi considerado como formulação matemática para o PCARPTW. Em ordem, as colunas apresentadas indicam:

- a instância (*Instância*);
- o número de nós ($|X|$);
- o número de arestas ($|E|$);
- o número de arestas requeridas ($|R|$);
- o número de períodos do horizonte de planejamento (P);
- o número de atendimentos que devem ser realizados no horizonte de planejamento (s);
- o número de veículos disponíveis para o planejamento (V).

Para cada um dos modelos, são apresentados como resultados:

- o valor da função objetivo (FO) obtido durante o tempo de processamento indicado (T);
- o $GAP = 100 \frac{(FO - LI)}{FO}$ (em %), melhor solução factível em relação ao limitante inferior (LI);
- o tempo de processamento (T – em segundos) utilizado pelo *solver* para obtenção de FO .

Para cada uma das instâncias, foi definido um tempo máximo de processamento de 10800 segundos.

TABELA 16 – INSTÂNCIAS COM JANELAS DE TEMPO JUSTAS E RESULTADOS

<i>Instância</i>	$ X $	$ E $	$ R $	P	s	V	<i>Modelo1</i>			<i>Modelo 2</i>		
							<i>FO</i>	<i>GAP%</i>	<i>T</i>	<i>FO</i>	<i>GAP%</i>	<i>T</i>
TW-A10A90-P	10	15	2	2	3	1	30	0	0,00	30	0	0,00
TW-A10A96-P	10	15	8	1	8	2	58	0	0,53	58	0	0,62
TW-A13A81-P	13	23	3	2	3	2	32	0	0,11	32	0	0,14
TW-A13A87-P	13	23	12	5	48	1	294	0	1,89	294	0	0,53
TW-A13B78-P	13	23	12	5	52	2	344	0	14,94	344	0	3,23
TW-A13C69-P	13	23	12	5	35	3	255	0	49,34	255	0	40,01
TW-A20B57-P	20	31	10	4	27	1	224	0	1,44	224	0	0,56
TW-A20B60-P	20	31	16	2	23	3	153	0	10,00	153	0	5,94
TW-A40C219-P	40	69	21	5	92	2	910	0	31,12	910	0	35,29
TW-A40C222-P	40	69	35	2	61	2	455	0	151,21	455	0	148,89
TW-A40D231-P	40	69	35	2	35	3	276	0	304,60	276	0	89,42
TW-A60A129-P	60	90	27	1	27	2	431	0	359,32	431	0	53,79
TW-A60A132-P	60	90	45	3	117	3	1548	14,21	10800	1589	13,59	10800
TW-B10A45-P	10	15	2	5	8	2	100	0	0,02	100	0	0,02
TW-B10A51-P	10	15	8	4	23	3	166	0	7,83	166	0	3,12
TW-B13A42-P	13	23	12	4	40	2	242	0	6,87	242	0	4,00
TW-B13B33-P	13	23	12	4	36	3	272	0	432,57	272	0	38,14
TW-B13C24-P	13	23	12	3	26	1	144	0	0,47	144	0	0,27
TW-B20B15-P	20	31	16	4	53	1	362	0	2,70	362	0	1,48
TW-B40C210-P	40	69	21	2	34	3	361	3,6	10800	361	0	3522,40
TW-B40D204-P	40	69	35	1	35	3	262	0	238,26	262	0	110,40
TW-B60A114-P	60	90	45	1	45	3	552	0	2197,59	552	0	634,83
TW-B60A120-P	60	90	27	3	68	2	1080	5,46	10800	1073	3,82	10800
TW-C10A195-P	10	15	8	4	16	2	132	0	12,83	132	0	11,12
TW-C13A186-P	13	23	12	5	42	2	260	0	9,08	260	0	4,19
TW-C13B177-P	13	23	12	3	27	2	153	0	16,92	153	0	6,44
TW-C13C168-P	13	23	12	4	24	3	157	0	4,44	157	0	3,17
TW-C20B159-P	20	31	16	5	44	2	345	0	16,81	345	0	9,70
TW-C40C144-P	40	69	7	4	16	2	309	0	11,62	309	0	4,53
TW-C40C150-P	40	69	35	4	70	1	656	0	333,32	656	0	60,70
TW-C40D135-P	40	69	7	5	25	2	415	0	1,59	415	0	0,77
TW-C40D141-P	40	69	35	2	60	3	451	0	7318,32	451	0	2302,95
TW-C60A105-P	60	90	45	5	133	1	-	-	10800	1735	0	2706,35

Fonte: O Autor (2019)

TABELA 17 – INSTÂNCIAS COM JANELAS DE TEMPO INTERMEDIÁRIAS E RESULTADOS

<i>Instância</i>	$ X $	$ E $	$ R $	P	s	V	<i>Modelo 1</i>			<i>Modelo 2</i>		
							<i>FO</i>	<i>GAP%</i>	<i>T</i>	<i>FO</i>	<i>GAP%</i>	<i>T</i>
TW-A10A97-P	10	15	8	5	34	1	251	0	3,03	251	0	1,39
TW-A13A88-P	13	23	12	3	31	2	174	0	56,04	174	0	123,35
TW-A13B79-P	13	23	12	1	12	3	77	0	10,69	77	0	2,77
TW-A13C67-P	13	23	7	5	20	1	149	0	0,16	149	0	0,27
TW-A13C70-P	13	23	12	2	14	1	77	0	0,44	77	0	0,44
TW-A20B61-P	20	31	16	4	51	2	284	13,03	10800	284	13,38	10800
TW-A40C220-P	40	69	21	1	21	3	192	4,69	10800	192	0	742,18
TW-A40D232-P	40	69	35	5	142	2	-	-	10800	-	-	10800
TW-A60A130-P	60	90	27	2	44	1	696	12,93	10800	696	12,07	10800
TW-B10A52-P	10	15	8	5	26	2	192	0	1,62	192	0	1,45
TW-B13A37-P	13	23	3	2	4	3	75	0	0,02	75	0	0,00
TW-B13A43-P	13	23	12	3	28	3	196	3,57	10800	196	0	38,17
TW-B13B34-P	13	23	12	1	12	3	71	0	1,41	71	0	1,00
TW-B13C25-P	13	23	12	5	48	3	321	10,9	10800	321	0	3628,35
TW-B20B16-P	20	31	16	2	26	2	140	0	3,69	140	0	10,12
TW-B40C211-P	40	69	21	1	21	4	225	12,89	10800	222	0	138,73
TW-B40C214-P	40	69	35	4	95	1	697	0	4527,04	697	0	2171,95
TW-B40D202-P	40	69	21	5	61	3	661	11,65	10800	654	3,98	10800
TW-B40D205-P	40	69	35	3	87	2	678	6,05	10800	685	6,28	10800
TW-B60A112-P	60	90	27	5	78	1	1342	11,33	10800	-	-	10800
TW-B60A121-P	60	90	27	2	44	2	614	3,26	10800	614	3,09	10800
TW-B60A124-P	60	90	45	1	45	3	553	10,67	10800	533	3	10800
TW-C10A196-P	10	15	8	4	18	3	127	0	22,17	127	0	21,73
TW-C13A187-P	13	23	12	1	12	2	70	0	0,83	70	0	0,91
TW-C13B178-P	13	23	12	3	28	2	159	0	32,48	159	0	8,52
TW-C13C169-P	13	23	12	1	12	3	74	0	19,06	74	0	4,37
TW-C20B160-P	20	31	16	2	27	4	192	0	511,01	192	0	74,76
TW-C40C148-P	40	69	21	5	59	3	603	18,08	10800	567	7,94	10800
TW-C40C151-P	40	69	35	2	35	3	275	2,91	10800	275	0	10781,21
TW-C60A103-P	60	90	27	4	75	3	1086	1,01	10800	1086	0	511,68
TW-C60A106-P	60	90	45	1	45	2	467	0	1195,38	467	0	385,65

Fonte: O Autor (2019)

TABELA 18 – INSTÂNCIAS COM JANELAS DE TEMPO LARGAS E RESULTADOS

Instância	$ X $	$ E $	$ R $	P	s	V	Modelo 1			Modelo 2		
							FO	GAP%	T	FO	GAP%	T
TW-A10A98-P	10	15	8	5	23	2	196	0	115,04	196	0	88,23
TW-A13A89-P	13	23	12	1	12	2	65	0	1,00	65	0	0,84
TW-A13B77-P	13	23	7	4	19	1	148	0	0,28	148	0	0,14
TW-A13B80-P	13	23	12	3	27	2	145	0	199,50	145	0	59,84
TW-A13C68-P	13	23	7	2	8	2	75	0	6,41	75	0	2,05
TW-A13C71-P	13	23	12	3	29	2	171	0	8,86	171	0	8,62
TW-A20B59-P	20	31	10	5	38	2	285	0	6964,19	285	0	6810,80
TW-A20B62-P	20	31	16	2	24	1	150	0	1,61	150	0	4,41
TW-A40C221-P	40	69	21	2	30	4	245	0	22,12	245	0	14,06
TW-A40C224-P	40	69	35	5	115	3	837	9,68	10800	946	20,4	10800
TW-A40D230-P	40	69	21	1	21	4	184	0	1644,93	184	0	62,50
TW-A40D233-P	40	69	35	3	97	2	765	2,61	10800	765	2,22	10800
TW-A60A128-P	60	90	9	4	29	3	844	36,73	10800	834	4,08	10800
TW-A60A131-P	60	90	27	3	73	2	1004	8,67	10800	984	2,95	10800
TW-A60A134-P	60	90	45	2	74	1	787	1,65	10800	787	1,65	10800
TW-B10A53-P	10	15	8	1	8	2	54	0	0,78	54	0	0,22
TW-B13A44-P	13	23	12	5	46	2	295	3,73	10800	295	0	1486,13
TW-B13B32-P	13	23	7	3	15	1	102	0	0,91	102	0	0,36
TW-B13B35-P	13	23	12	5	44	2	261	0	24,01	261	0	13,08
TW-B13C23-P	13	23	7	2	9	3	83	0	24,53	83	0	1,80
TW-B13C26-P	13	23	12	1	12	3	87	0	971,32	87	0	12,08
TW-B20B14-P	20	31	10	3	22	2	187	0	2696,71	187	0	183,88
TW-B20B17-P	20	31	16	5	64	3	421	5,23	10800	412	0	3132,07
TW-B40C209-P	40	69	7	5	23	2	435	14,94	10800	435	0	8274,23
TW-B40C215-P	40	69	35	3	91	2	-	-	10800	733	6,68	10800
TW-B40D203-P	40	69	21	2	36	2	326	0	136,91	326	0	140,27
TW-B60A116-P	60	90	45	1	45	2	508	0	8079,77	508	0	899,91
TW-C10A194-P	10	15	5	5	16	1	116	0	0,22	116	0	0,08
TW-C10A197-P	10	15	8	2	8	1	40	0	0,03	40	0	0,11
TW-C13A185-P	13	23	7	5	15	3	135	0	1,08	135	0	0,87
TW-C13A188-P	13	23	12	5	47	1	211	0	217,63	211	0	238,50
TW-C13B176-P	13	23	7	2	9	1	65	0	0,33	65	0	0,23
TW-C13B179-P	13	23	12	5	46	1	282	0	574,88	282	0	347,30
TW-C13C167-P	13	23	7	3	15	2	106	0	5,14	106	0	4,83
TW-C13C170-P	13	23	12	3	18	2	107	0	627,82	107	0	118,05
TW-C20B158-P	20	31	10	5	24	1	198	0	130,29	198	0	121,29
TW-C20B161-P	20	31	16	2	27	2	150	0	7,91	150	0	6,52
TW-C40C152-P	40	69	35	1	35	2	283	1,41	10800	283	0	2267,27
TW-C40D140-P	40	69	21	3	54	1	456	7,68	10800	456	4,17	10800
TW-C40D143-P	40	69	35	1	35	3	274	1,82	10800	274	0	9243,53
TW-C60A107-P	60	90	45	2	70	1	818	1,22	10800	818	0,73	10800

Fonte: O Autor (2019)

O desempenho do *solver* sobre as 105 instâncias, considerando-se, os Modelos 1 e 2 como formulação matemática para o PCARPTW, é apresentado na Tabela 19 com a classificação das soluções como ótima, factível e não factível.

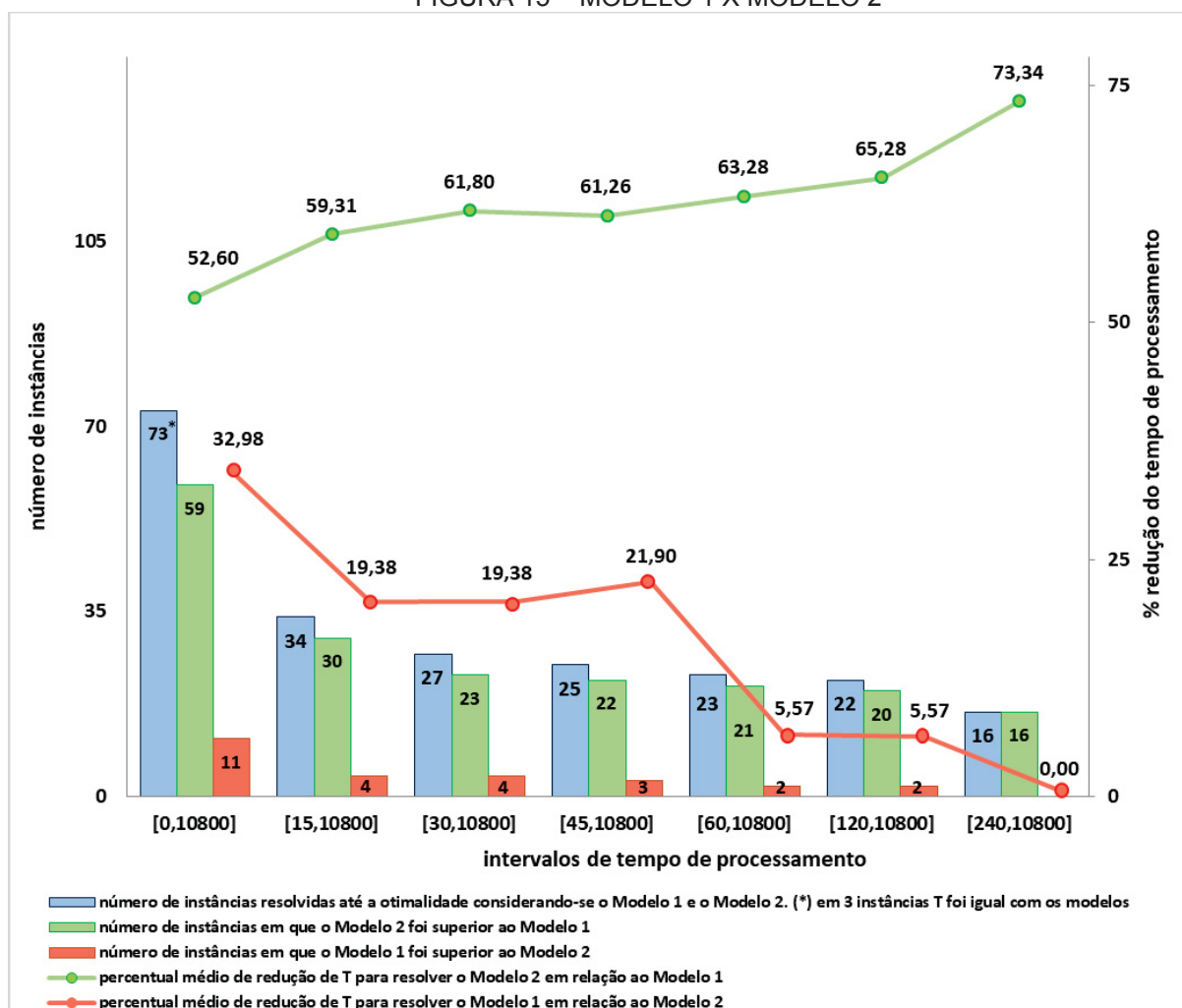
TABELA 19 – RESULTADOS SOBRE OS MODELOS 1 E 2

Classificação	Modelo 1	Modelo 2
Solução ótima	73	86
Solução factível	29	17
Solução não factível	3	2
Total	105	105

FONTE: O Autor (2019).

A Figura 15 apresenta a comparação dos resultados obtidos com o *solver* sobre as 73 instâncias que foram resolvidas até a otimalidade, quando considerados os Modelos 1 e 2. As comparações são realizadas de acordo com os sete intervalos de tempo de processamento (em segundos): $[0,10800]$, $[15,10800]$, $[30,10800]$, $[45,10800]$, $[60,10800]$, $[120,10800]$ e $[240,10800]$, gerando assim, outros sete cenários para efetivação das análises. As instâncias designadas para cada um dos cenários foram resolvidas até a otimalidade pelo *solver* com os dois modelos, Modelo 1 e Modelo 2, e em tempo de processamento dentro do intervalo indicado, apenas com o Modelo 1, e não necessariamente com o Modelo 2, podendo as instâncias, com o segundo modelo, serem resolvidas em tempo de processamento fora do intervalo de tempo indicado (como nas análises apresentadas nas Figuras 13 e 14). Os intervalos são apresentados no eixo horizontal do gráfico na Figura 15.

FIGURA 15 – MODELO 1 X MODELO 2



FONTE: O Autor (2019).

As colunas azuis indicam o número de instâncias que foram resolvidas até a otimalidade, considerando-se os Modelos 1 e 2, e em tempo de processamento dentro do intervalo indicado com o Modelo 1. Já as colunas verdes exibem o número de instâncias em que o Modelo 2 foi superior ao Modelo 1 e, para essas instâncias, a curva verde apresenta o percentual médio de redução do tempo de processamento para obtenção de uma solução ótima. Por outro lado, as colunas vermelhas mostram o número de instâncias em que o Modelo 1 foi superior ao Modelo 2 e, considerando essas instâncias, a curva vermelha mostra o percentual médio de redução do tempo de processamento para obtenção de uma solução ótima.

Considerando-se, na Figura 15, as 73 instâncias que foram resolvidas até a otimalidade, pode-se observar que, sobre 59 instâncias, o Modelo 2 foi superior ao Modelo 1, em que o tempo de processamento utilizado pelo *solver* reduziu em média

52,6%. Por outro lado, sobre as 11 instâncias em que o Modelo 1 foi superior ao Modelo 2, o tempo de processamento reduziu em média 32,98%. Resultados sobre instâncias menores pesam sobre esse último percentual, como no caso da instância TW-C10A197-P apresentado na Tabela 18, resolvida em 0,03 segundos quando considerado o Modelo 1 e, em 0,11 segundos com o Modelo 2, sendo assim, com o Modelo 1, o tempo de processamento reduziu 72,73% em relação ao Modelo 2.

O *solver* apresentou resultados mais notáveis na resolução do Modelo 2 sobre as 16 instâncias mais complexas, ou seja, aquelas designadas para o último cenário, resolvidas em tempo de processamento dentro do intervalo de segundos $[240,10800]$. Um exemplo disso é o caso da instância TW-B13C26-P, indicada na Tabela 18, resolvida em 971,32 segundos quando considerado o Modelo 1 e em 12,08 segundos com o Modelo 2. Dessa forma, com o Modelo 2, o tempo de processamento reduziu 98,76% em relação ao resultado alcançado com o Modelo 1.

Para uma análise em relação as 32 instâncias resolvidas até o tempo máximo de processamento, com o Modelo 1 ou o Modelo 2, como formulação matemática para o PCARPTW, a Tabela 20 traz a classificação das soluções encontradas.

TABELA 20 – INSTÂNCIAS RESOLVIDAS ATÉ O TEMPO MÁXIMO DE PROCESSAMENTO

Classificação	Modelo 1	Modelo 2
Solução ótima	0	13
Solução factível	29	17
Solução não factível	3	2
Total	32	32

FONTE: O Autor (2019).

Pode-se observar na Tabela 20 que com o Modelo 2, foi possível encontrar a solução ótima para 13 das 32 instâncias resolvidas até o tempo máximo de processamento com o Modelo 1. Dessas 13 instâncias, tem-se que com o Modelo 1, foi possível encontrar solução factível para 12 instâncias e para 1 instância não foi encontrada solução factível. Para efeito de comparações sobre as demais 19 instâncias, o valor obtido para *FO* foi menor com o Modelo 2 sobre 6 instâncias, maior sobre 3 instâncias e igual sobre 7 instâncias. Considerando as 7 instâncias em que o valor de *FO* foi igual com os Modelos 1 e 2, tem-se que o valor do GAP foi menor com o Modelo 2 sobre 5 instâncias, maior em 1 instância e igual em 1

instância. Para uma instância, foi possível encontrar solução factível com o Modelo 2, mas não com o Modelo 1. Já em outra instância, a solução factível foi encontrada com o Modelo 1, mas não com o Modelo 2. Por fim, houve uma instância em que não foi possível encontrar solução factível com nenhuma das duas formulações matemáticas.

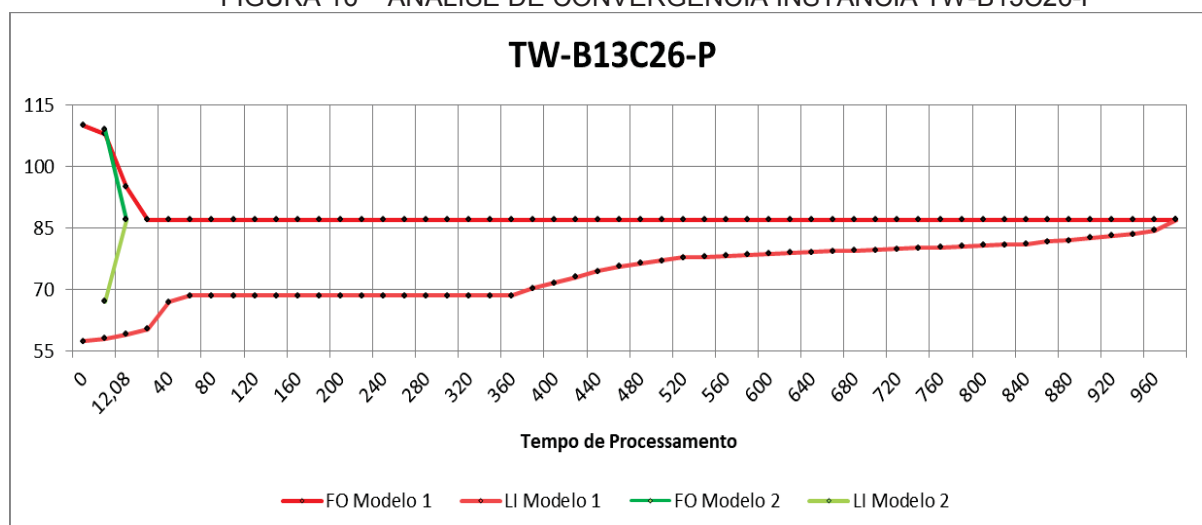
Dessa forma, com os resultados apresentados, pode-se concluir que a formulação matemática com desigualdades válidas (Modelo 2) é superior à formulação matemática sem desigualdades válidas (Modelo 1). Além disso, com o Modelo 2, foi possível encontrar a solução ótima para um número maior de instâncias; no geral, o tempo de processamento para obtenção de uma solução ótima foi menor; foi possível encontrar soluções melhores; além de haver melhora nos limitantes inferiores.

Conclui-se, então, que o desempenho do *solver* sobre o Modelo 2 é superior ou igual ao desempenho sobre Modelo 1 em 84,76% das instâncias e inferior em 15,24% das instâncias, levando-se em consideração o tempo de processamento utilizado pelo *solver* para obtenção de uma solução ótima, o valor da função objetivo e o GAP.

5.4 ANÁLISE COMPARATIVA DE CONVERGÊNCIA ENTRE OS MODELOS

As Figuras 16-20 exibem uma análise comparativa de convergência das soluções factíveis encontradas para os Modelos 1 e 2 ao longo do tempo de processamento utilizado pelo *solver*. As curvas vermelhas apresentam a evolução do valor da função objetivo (FO) para as soluções factíveis encontradas para o Modelo 1, além da evolução dos respectivos limitantes inferiores (LI). Já as curvas verdes mostram a evolução do valor da função objetivo e dos respectivos limitantes inferiores de acordo com as soluções factíveis encontradas para o Modelo 2. O eixo horizontal indica o tempo de processamento e o eixo vertical apresenta o valor da função objetivo e dos respectivos limitantes inferiores.

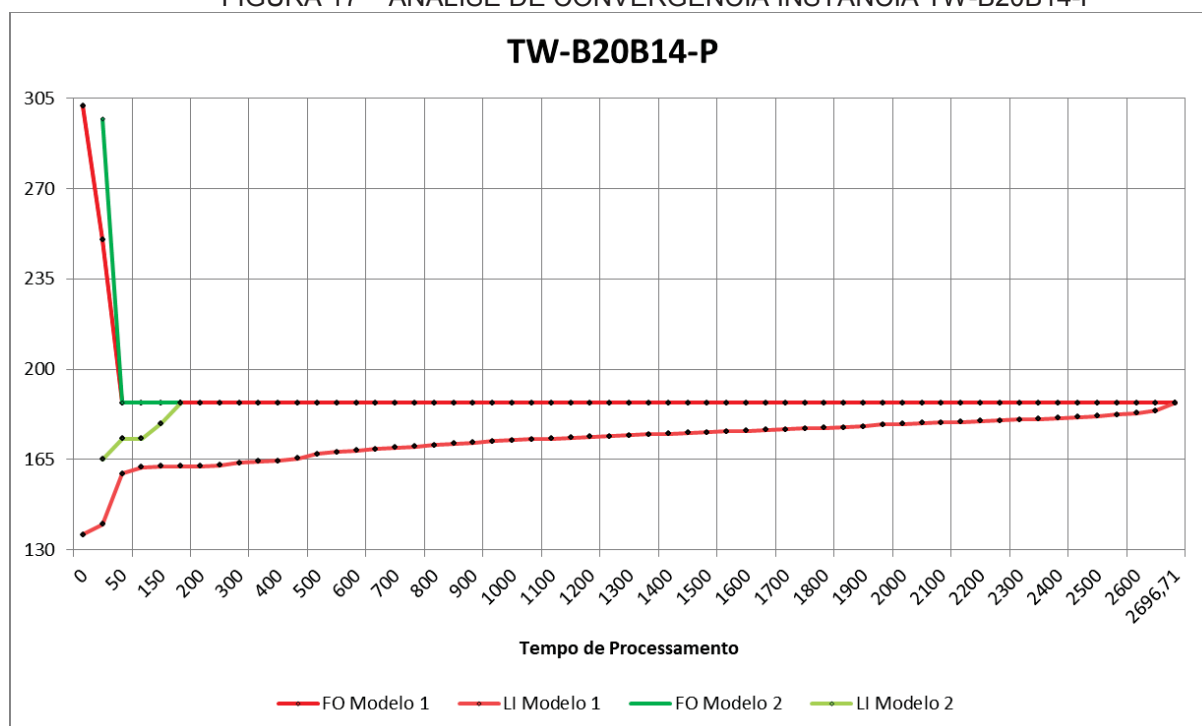
FIGURA 16 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-B13C26-P



FONTE: O Autor (2019).

Para a análise sobre a instância TW-B13C26-P (Figura 16), tem-se como destaque a rapidez com que foi comprovada a otimalidade para uma solução factível do Modelo 2. Durante a evolução do tempo de processamento pode se observar que uma solução factível foi encontrada inicialmente para o Modelo 1 (em tempo de processamento instantâneo) e posteriormente para o Modelo 2 (em 3 segundos). Além disso, em relação as primeiras soluções factíveis encontradas, o limitante inferior para o Modelo 2 foi 67,11, sendo esse melhor (maior) do que o limitante inferior para o Modelo 1 que foi 57,33. A partir desse instante, a evolução do limitante inferior até a comprovação da otimalidade foi muito mais rápida com o Modelo 2 do que com o Modelo 1.

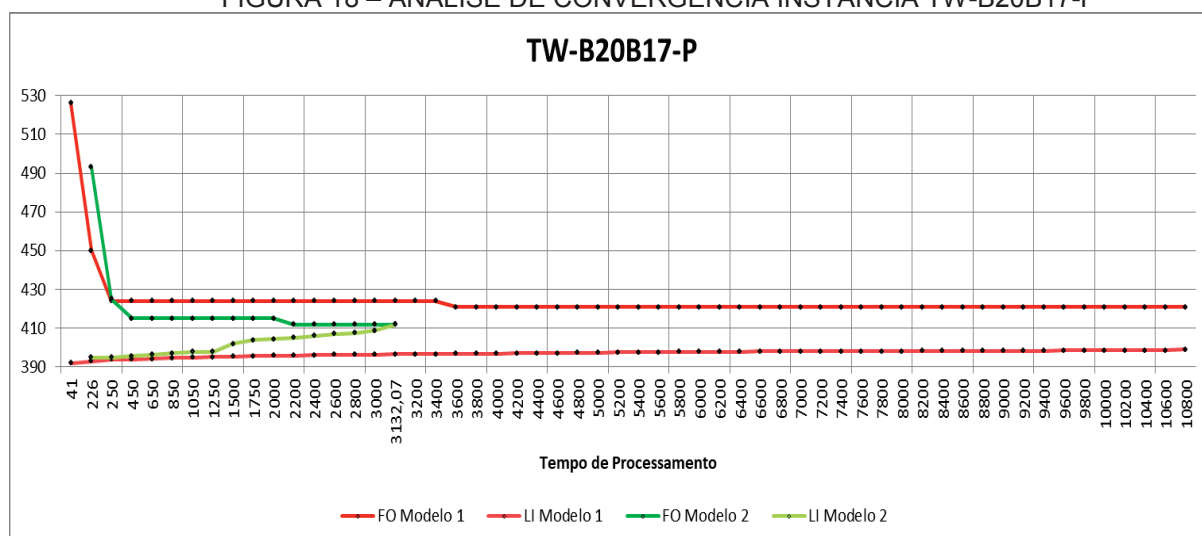
FIGURA 17 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-B20B14-P



FONTE: O Autor (2019).

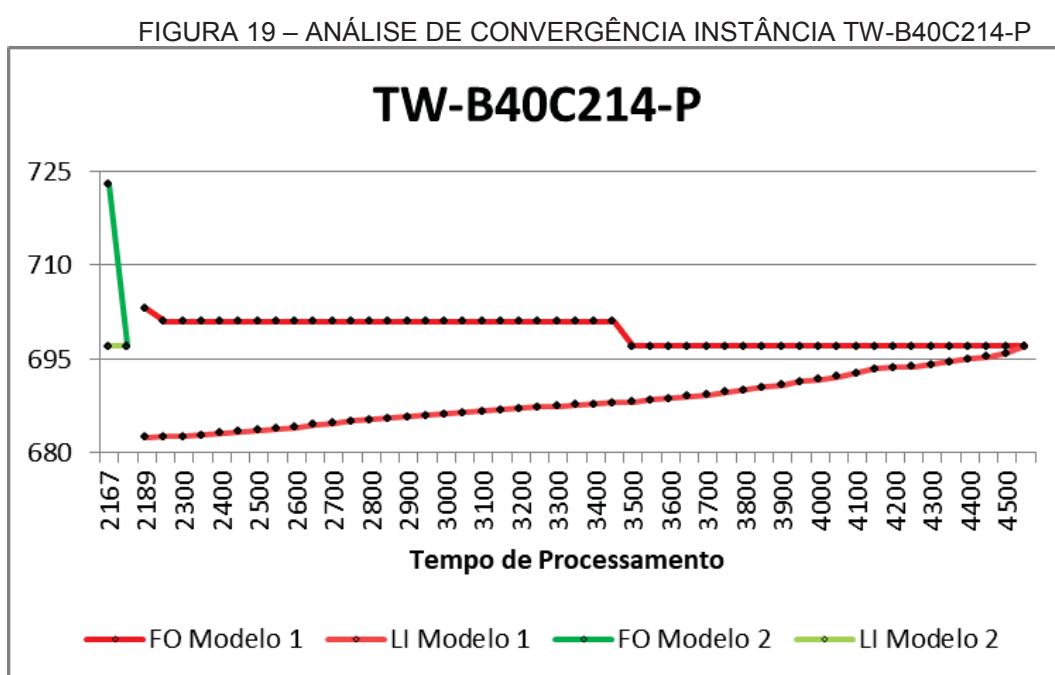
A análise sobre a instância TW-B20B14-P (Figura 17) ressalta a rapidez de comprovação da otimalidade quando considerado o Modelo 2, pois uma solução factível ótima foi encontrada praticamente com o mesmo tempo de processamento quando considerados os Modelos 1 e 2 (em torno de 50 segundos), mas a comprovação da otimalidade foi muito mais rápida com o Modelo 2 do que com o Modelo 1, como mostra a evolução do limitante inferior.

FIGURA 18 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-B20B17-P



FONTE: O Autor (2019).

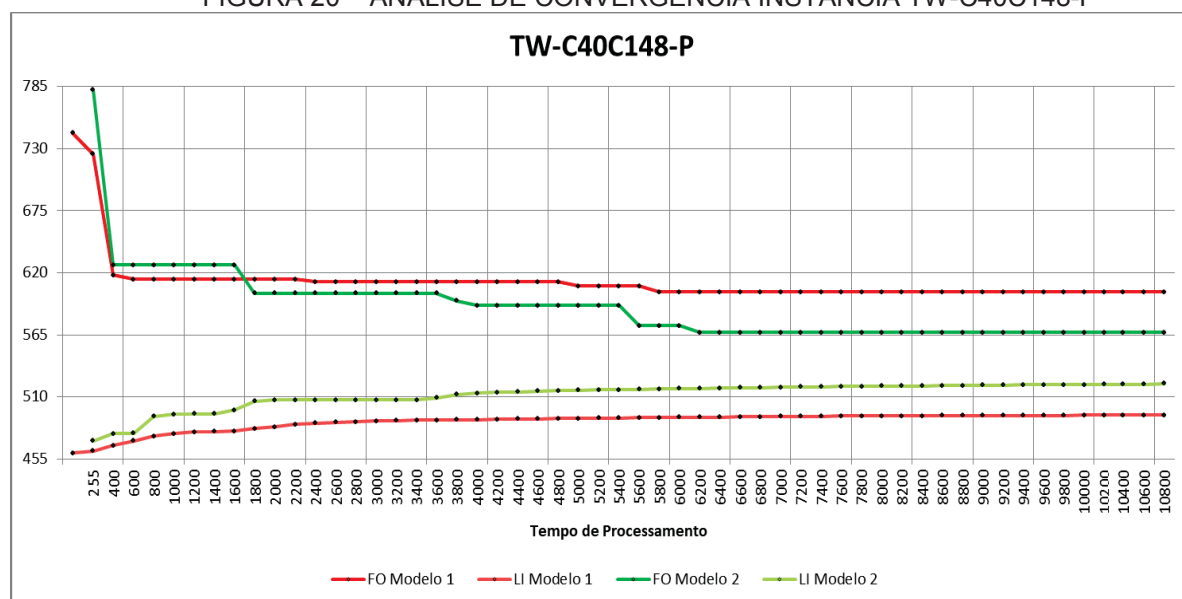
A análise sobre a instância TW-B20B17-P (Figura 18) mostra que essa instância foi resolvida até o tempo máximo de processamento quando considerado o Modelo 1, por outro lado, com o Modelo 2 foi comprovada a otimalidade de uma solução factível em 3132,07 segundos. Vale ressaltar que uma primeira solução factível foi encontrada inicialmente para o Modelo 1 (em 41 segundos) e posteriormente para o Modelo 2 (em 226 segundos). Além disso, ao final do tempo máximo de processamento, o valor encontrado para a FO do Modelo 1 (421) não corresponde a solução ótima do problema (412), em que essa foi encontrada com o Modelo 2.



FONTE: O Autor (2019).

Na análise sobre a instância TW-B40C214-P (Figura 19), tem-se como grande destaque, o fato de que a comprovação da otimalidade de uma solução factível do Modelo 2 ocorreu em tempo de processamento de 2171,95 segundos, sendo esse tempo de processamento inferior aquele utilizado para obtenção de uma primeira solução factível para o Modelo 1 (2189 segundos).

FIGURA 20 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA INSTÂNCIA TW-C40C148-P



FONTE: O Autor (2019).

A instância TW-C40C148-P foi resolvida até o tempo máximo de processamento com os Modelos 1 e 2. Vale aqui destacar a redução do valor da função objetivo do Modelo 2, comparado ao Modelo 1, quando o tempo de processamento estava entre 1600 e 1800 segundos. Nesse intervalo, o valor da FO do Modelo 2 reduziu e ultrapassou o valor de FO do Modelo 1 permanecendo menor até o *solver* atingir o tempo máximo de processamento. Em relação ao valor dos limitantes inferiores, tem-se que desde a obtenção da primeira solução factível, os valores obtidos com o Modelo 2 foram sempre melhores (maiores) do que os encontrados com o Modelo 1. Além disso, ao final do tempo máximo de processamento tem-se que o valor de FO do Modelo 2 foi 567, melhor do que o valor de FO do Modelo 1, sendo ele igual a 603.

As análises apresentadas nas Figuras 16-20 evidenciam a influência das desigualdades válidas sobre o Modelo 1, pois com o Modelo 2 (formulação matemática com as desigualdades válidas), a evolução do valor da função objetivo e dos limitantes inferiores até a comprovação da otimalidade é muito mais rápida do que com o Modelo 1.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou duas propostas de formulações matemáticas para o PCARPTW, sem e com desigualdades válidas, com base nas formulações matemáticas dos seguintes problemas: CRPPTW de Mullaseril (1996); PCARP de Chu, Labadi e Prins (2005) e RPPTW de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014).

Em relação aos ARPTW existentes na literatura, esta tese apresenta uma expansão, para mais de um período, dos problemas CPPTW, RPPTW, CRPPTW e CARPTW. Por outro lado, em relação ao problema periódico PCARP, esta tese apresenta um estudo para uma variante do problema ainda não tratada amplamente na literatura: o PCARP com janelas de tempo.

Para as formulações matemáticas do PCARPTW, foi utilizada a metodologia de transformação do ARP em um equivalente NRP, como proposto por Mullaseril (1996), Aminu e Eglese (2006), Tagmouti, Gendreau e Potvin (2007) e Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Os horários de entrada dos veículos nas arestas são associados apenas às arestas requeridas. O único atendimento que deve ser realizado ao longo das arestas requeridas, a cada período, garante que diferentes horários sejam associados a arestas distintas. Essa metodologia possibilita que as arestas sejam atravessadas inúmeras vezes, pois os deslocamentos, sem atendimentos, são realizados implicitamente por meio dos caminhos de custo mínimo.

Além disso, foram adaptadas e propostas novas desigualdades válidas com capacidade de obter uma solução ótima em menor tempo computacional e, assim, avançando a teoria sobre o PCARPTW.

As duas formulações matemáticas, com e sem desigualdades válidas, foram validadas sobre um conjunto de 225 instâncias para o RPPTW (problema definido sobre um único período e não capacitado) proposto por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). A formulação matemática para o RPPTW proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) e as duas formulações matemáticas aqui propostas foram implementadas e testadas por meio do *solver GUROBI* 8.0.0. Os resultados computacionais mostram que as formulações matemáticas para o PCARPTW, sem e com desigualdades válidas, são capazes de gerar ganhos em comparação com a formulação matemática para o RPPTW proposta por Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Os resultados mais relevantes foram obtidos sobre o conjunto das

instâncias resolvidas em tempo de processamento igual ou superior a 5 segundos, em que o tempo de processamento para obtenção de uma solução ótima reduziu, em média, 72,07% com a formulação matemática sem desigualdades válidas comparado aos resultados obtidos com a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Ademais, quando considerada a formulação matemática com desigualdades válidas, o tempo de processamento reduziu em média 76,88% quando comparado aos resultados obtidos com a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014). Considerando-se os resultados encontrados sobre todas as 225 instâncias, pode-se concluir que aqueles obtidos com a formulação matemática sem desigualdades válidas são superiores ou iguais aos obtidos com a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) em 73,33% das instâncias. Já em relação a formulação com desigualdades válidas, os resultados são superiores ou iguais aos obtidos com a proposta de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) em 83,56% das instâncias.

Para testar as formulações matemáticas aqui propostas, foram adaptadas 105 instâncias do RPPTW de Monroy-Licht, Amaya e Langevin (2014) para o PCARPTW (problema periódico e capacitado). Os resultados computacionais mostram que a formulação matemática com desigualdades válidas é superior à formulação matemática sem desigualdades válidas. Os resultados mais relevantes foram obtidos sobre as instâncias mais complexas, aquelas resolvidas até a otimalidade e, em tempo de processamento igual ou superior a 240 segundos quando considerada a formulação matemática sem desigualdades válidas, sobre essas instâncias, com a formulação matemática com desigualdades válidas, o tempo de processamento reduziu em média 73,34%.

De maneira geral, pode-se concluir que a formulação matemática com desigualdades válidas é superior à formulação sem desigualdades válidas, pois é possível encontrar a solução ótima para um número maior de instâncias, o tempo de processamento para obtenção de uma solução ótima é menor, ela possibilita encontrar soluções melhores, além de apresentar melhorarias nos limitantes inferiores. Os resultados encontrados considerando-se a formulação com desigualdades válidas são superiores ou iguais àqueles encontrados com a formulação sem desigualdades válidas em 84,76% das instâncias, e pior em 15,24% das instâncias, levando-se em consideração o tempo de processamento utilizado

pelo *solver* para obtenção de uma solução ótima, o valor da função objetivo e, o GAP, nessa ordem de importância.

Como trabalho futuro pretende-se estudar outras desigualdades válidas e estratégias eficientes, para inseri-las na formulação matemática para o PCARPTW, e assim desenvolver um algoritmo *branch-and-cut* como estratégia de resolução para o PCARPTW.

Os seguintes trabalhos são originários dos estudos realizados ao longo do desenvolvimento da pesquisa apresentada nesta tese.

- Um Estudo de Modelos de Problemas de Roteamento em Arcos. **Anais do Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia, 2016** (publicado);
- Formulação Matemática para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo e Tempo Máximo de Espera. **Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção, 2018** (publicado);
- Testes de Diferentes Valores do Parâmetro Big M do Modelo Matemático para o Problema de Carteiro Rural Capacitado com Janelas de Tempo. **Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção, 2018** (publicado);
- A Mathematical Model For The Periodic Capacitated Arc Routing Problem With Time Windows. **IEEE Latin America Transactions**, (2018, aceito);
- Mathematical Formulations for the Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows. **30th European Conference on Operational Research**, Dublin-Ireland, 2019 (aceito);
- Periodic Capacitated Arc Routing Problem With Time Windows: Mathematical Models and Valid Inequalities. **Discrete Applied Mathematics**, (2019, em revisão).

REFERÊNCIAS

- AMINU, U. F.; EGGLESE, R. W. A constraint programming approach to the Chinese postman problem with time windows. **Computers & Operations Research**, v.33, p.3423-3431, 2006.
- BATISTA, G. V. Proposta de um Modelo Matemático para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 93 f, 2014.
- BATISTA, G. V.; SCARPIN, C. T. Comparison between two mathematical models for problems in monitoring and inspection of arcs. **International Refereed Journal of Engineering and Science (IRJES)**, v.3, p.19-24, 2014.
- BATISTA, G. V.; SCARPIN, C. T. Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico Aplicado a um Contexto Real. **Produção Online Revista Científica Eletrônica de Engenharia de Produção**, v.15, p.1080-1098, 2015.
- BATISTA, G. V. O Problema de Roteamento Periódico e Capacitado em Arcos com Movimentos Contínuos. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 134 f, 2018.
- CALOGIURI, T.; GHIANI, G.; GUERRIERO, E.; MANSINI, R. A branch-and-bound algorithm for the time-Dependent rural postman problem. **Computers and Operations Research**, v.102, p.150-157, 2019.
- CHEN, Y.; HAO, J. K. Two phased hybrid local search for the periodic capacitated arc routing problem. **European Journal of Operational Research**, v.264, p.55-65, 2018.
- CHU, F.; LABADI, N.; PRINS, C. The Periodic Capacitated Arc Routing Problem Linear Programming Model, Metaheuristic and Lower Bounds. **Journal of System Science and Systems Engineering**, v.13, p.423-435, 2004.
- CHU, F.; LABADI, N.; PRINS, C. Heuristics for the periodic capacitated arc routing problem. **Journal of Intelligent Manufacturing**, v.16, p.243-251, 2005.
- CHU, F.; LABADI, N.; PRINS, C. A Scatter Search for the periodic capacitated arc routing problem. **European Journal of Operational Research**, v.169, p.586-605, 2006.
- CORBERÁN, A.; PRINS, C. Recent Results on Arc Routing Problems: An Annotated Bibliography. **Networks**, v.56, p.50-69, 2010.
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Algoritmos: Teoria e Prática**, 2. ed., Ed. Campus, 2002.
- DANTZIG, G.; FULKERSON, R.; JOHNSON, S. Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. **The Rand Corporation**, Santa Monica, California, 1954.

DESROCHERS, M.; LAPORTE, G. Improvements and extensions to the Miller-Tucker-Zemlin subtour elimination constraints. **Operations Research Letters**, v.10, p.27-36, 1991.

DETOFENO, T. C. Otimização de Rotas de Coleta de Resíduos Sólidos Urbanos, Utilizando Técnicas de Pesquisa Operacional. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 66 f, 2009.

DIJKSTRA, E. W. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. **Numerische Mathematik**, v.1, p.269-271, 1959.

EGLESE, R. W. Routeing winter gritting vehicles. **Discrete Applied Mathematics**, v.48, p.231-244, 1994.

EVANS, J. R.; MINIEKA, E. **Optimization algorithms for networks and graphs**, 2. ed., 1992.

FLOYD, R. W. Algorithm 97: Shortest Path. **Communications of the ACM**, v.5, n.6, p.345, 1962.

GHIANI, G.; MUSMANNO, R.; PALETTA, G.; TRIKI, C. A heuristic for the periodic rural postman problem. **Computers & Operations Research**, v.32, p.219-228, 2005.

GOLDEN, B. L.; WONG, R. T. Capacitated Arc Routing Problem. **Networks**, v.11, p.305-315, 1981.

GUROBI OPTIMIZATION. Gurobi Optimizer Reference Manual. Obtido de <http://www.gurobi.com/>, 2019.

HUANG, S. H.; LIN, P. C. Multi-treatment capacitated arc routing of construction machinery in Taiwan's smooth road project. **Automation in Construction**, v.21, p.210-218, 2012.

JOHNSON, E. L.; WOHLK, S. Solving the Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows using Column Generation. **Coral Working Papers**, University of Aarhus, Department of Business Studies, p.1-15, 2009.

KANG, M. J.; HAN, C. G. Comparison of crossover operators for Rural Postman Problem with Time Windows. **Soft Computing in Engineering Design and Manufacture**, p.259-267, 1998.

KANSOU, A.; YASSINE, A. Ant Colony System for the Periodic Capacitated Arc Routing Problem. **Proc. International Network Optimization Conference**, 2009.

KIM, B. I.; KIM, S.; SAHOO, S. Waste collection vehicle routing problem with time windows. **Computers & Operations Research**, v.33, p.3624-3642, 2006.

LACOMME, P.; PRINS, C.; RAMDANE-CHÉRIF, W. Evolutionary Algorithms for Multiperiodic Arc Routing Problems. **IPMU 9th Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems**, p.1-8, 2002.

LACOMME, P.; PRINS, C.; RAMDANE-CHÉRIF, W. Evolutionary algorithms for periodic arc routing problems. **European Journal of Operational Research**, v.165, p.535-553, 2005.

LETCHFORD, A. N.; EGGLESE, R. W. The rural postman problem with deadline classes. **European Journal of Operational Research**, v.105, p.390-400, 1998.

LUM, O.; ZHANG, R.; GOLDEN, B.; WASIL, E. A hybrid heuristic procedure for the Windy Rural Postman Problem with ZigZag Time Windows. **Computers and Operations Research**, v.88, p.247-257, 2017.

MEI, Y.; TANG, K.; YAO, X. A Memetic Algorithm for Periodic Capacitated Arc Routing Problem. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B**, v.41, p.1654-1667, 2011.

MONROY, I. M.; AMAYA, C. A.; LANGEVIN, A. The periodic capacitated arc routing problem with irregular services. **Discrete Applied Mathematics**, v.161, p.691-701, 2013.

MONROY-LICHT, M.; AMAYA, C. A.; LANGEVIN, A. The Rural Postman Problem with Time Windows. **Networks**, p.169-180, 2014.

MONROY-LICHT, M.; AMAYA, C. A.; LANGEVIN, A. Adaptive Large Neighborhood Search Algorithm for the Rural Postman Problem with Time Windows. **Networks**, p.44-59, 2017.

MULLASERIL, P. A. Capacitated rural postman problem with time Windows and Split delivery, 1996. **PhD Thesis**. MIS Department, University of Arizona, Tucson, Arizona.

MURAT AFSAR, H. A Branch and Price Algorithm for Capacitated Arc Routing Problem with Flexible Time Windows. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v.36, p.319-326, 2010.

NOSSACK, J.; GOLDEN, B.; PESCH, E.; ZHANG, R. The windy rural postman problem with a time-dependent zigzag option. **European Journal of Operational Research**, v.258, p.1131-1142, 2017.

OLIVEIRA, J. D. Estratégias Relax-and-Fix Aplicada ao Problema de Roteamento em Arcos Capacitado e Periódico. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 94 f, 2017.

RAMDANE-CHÉRIF, W. Evolutionary Algorithms for Capacitated Arc Routing problems with Time Windows. **XII Symposium on Information Control Problems in Manufacturing**, Saint-Etienne, France, 2006.

REGHIOUI, M.; PRINS, C.; LABADI, N. GRASP with Path Relinking for the Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows. **EvoWorkshops, LNCS, Springer-Verlag Berlin Heidelberg**, p.722-731, 2007.

RIQUELME-RODRÍGUEZ, J. P.; LANGEVIN, A.; GAMACHE, M. Adaptive Large Neighborhood Search for the Periodic Capacitated Arc Routing Problem with Inventory Constraints. **Networks**, p. 125-139, 2014.

SANTOS, C. G.; SCARPIN, C. T. A mathematical modeling proposal for a Multiple Tasks Periodic Capacitated Arc Routing Problem. **Int. Journal of Engineering Research and Applications**, v.5, p.26-36, 2015.

SANTOS, C. G. Uma Proposta de Modelagem Matemática para um Problema de Roteirização Periódica em Arcos Capacitados com Múltiplas Tarefas. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 100 f, 2016.

SANTOS, C. G.; SCARPIN, C. T.; SILVA, F. P. Mathematical Modeling for Periodic Capacitated Arc Routing Problem. **International Journal of Engineering and Applied Sciences**, v.08, p.1-9, 2016.

SUN, J.; MENG, Y.; TAN, G. An integer programming approach for the Chinese postman problem with time-dependent travel time. **J. Comb. Optim.**, v.29, p.565-588, 2015.

TAGMOUTI, M.; GENDREAU, M.; POTVIN, J. Y. Arc routing problems with time-dependent service costs. **European Journal of Operational Research**, v.181, p.30-39, 2007.

TAGMOUTI, M.; GENDREAU, M.; POTVIN, J. Y. A variable neighborhood descent heuristic for arc routing problems with time-dependent service costs. **Computers & Industrial Engineering**, v.59, p.954-963, 2010.

TAGMOUTI, M.; GENDREAU, M.; POTVIN, J. Y. A dynamic arc routing problem with time-dependent service costs. **Transportation Research Part C**, v.18, p.20-28, 2011.

TAN, G.; SUN, J. An Integer Programming Approach for the Rural Postman Problem with Time Dependent Travel Times. **Computing and combinatorics, Springer, Berlin**, p.414-431, 2011.

TAN, G.; SUN, J.; HOU, G. The time-dependent rural postman problem: polyhedral results. **Optimization Methods & Software**, v.28, p.855-870, 2013.

THOMAZ, D. V.; LOCH, G. V.; SCARPIN, C. T.; SCHENEKEMBERG, C. M. A Mathematical Model For The Periodic Capacitated Arc Routing Problem With Time Windows. **IEEE Latin America Transactions**, 2019 (no prelo).

TIRKOLAEI, E. B.; MAHDAVI, I.; ESFAHANI, M. M. S. A robust periodic capacitated arc routing problem for urban waste collection considering drivers and crew's working time. **Waste Management**, v.76, p.138-146, 2018.

VANSTEENWEGEN, P.; SOUFFRIAU, W.; SORENSEN, K. Solving the mobile mapping van problem: A hybrid metaheuristic for capacitated arc routing with soft time windows. **Computers & Operations Research**, v.37, p.1870-1876, 2010.

WANG, H. F.; WEN, Y. P. Time-Constrained Chinese Postman Problems. **Computers And Mathematics with Applications**, v.44, p.375-387, 2002.

ZHANG, Y.; MEI, Y.; TANG, K.; KEQIN, K. Memetic algorithm with route decomposing for periodic capacitated arc routing problem. **Applied Soft Computing**, v.52, p.1130-1142, 2017.

APÊNDICE

TABELA 21 – INSTÂNCIAS UTILIZADAS NA VALIDAÇÃO DO PCARPTW E RESULTADOS

Instância	$ X $	$ E $	$ R $	Monroy-Licht et al. (2014)			Modelo 1			Modelo 2		
				FO	GAP%	T	FO	GAP%	T	FO	GAP%	T
TW-A10A90	10	15	2	16	0	0,00	16	0	0,00	16	0	0,00
TW-A10A91	10	15	2	24	0	0,00	24	0	0,13	24	0	0,11
TW-A10A92	10	15	2	22	0	0,00	22	0	0,08	22	0	0,00
TW-A10A93	10	15	5	37	0	0,02	37	0	0,00	37	0	0,02
TW-A10A94	10	15	5	37	0	0,11	37	0	0,02	37	0	0,02
TW-A10A95	10	15	5	41	0	0,13	41	0	0,14	41	0	0,11
TW-A10A96	10	15	8	52	0	0,09	52	0	0,11	52	0	0,00
TW-A10A97	10	15	8	53	0	0,08	53	0	0,12	53	0	0,20
TW-A10A98	10	15	8	56	0	0,70	56	0	0,41	56	0	0,30
TW-A13A81	13	23	3	24	0	0,00	24	0	0,02	24	0	0,11
TW-A13A82	13	23	3	25	0	0,02	25	0	0,06	25	0	0,09
TW-A13A83	13	23	3	35	0	0,14	35	0	0,12	35	0	0,13
TW-A13A84	13	23	7	53	0	0,09	53	0	0,31	53	0	0,11
TW-A13A85	13	23	7	53	0	0,02	53	0	0,11	53	0	0,08
TW-A13A86	13	23	7	47	0	0,39	47	0	0,45	47	0	0,12
TW-A13A87	13	23	12	68	0	0,05	68	0	0,08	68	0	0,06
TW-A13A88	13	23	12	64	0	0,73	64	0	0,28	64	0	0,33
TW-A13A89	13	23	12	59	0	0,09	59	0	0,12	59	0	0,14
TW-A13B72	13	23	3	36	0	0,09	36	0	0,00	36	0	0,05
TW-A13B73	13	23	3	21	0	0,00	21	0	0,00	21	0	0,00
TW-A13B74	13	23	3	27	0	0,00	27	0	0,02	27	0	0,13
TW-A13B75	13	23	7	48	0	0,09	48	0	0,31	48	0	0,13
TW-A13B76	13	23	7	51	0	0,09	51	0	0,31	51	0	0,12
TW-A13B77	13	23	7	44	0	0,11	44	0	0,09	44	0	0,02
TW-A13B78	13	23	12	69	0	0,08	69	0	0,02	69	0	0,03
TW-A13B79	13	23	12	57	0	0,34	57	0	0,31	57	0	0,37
TW-A13B80	13	23	12	58	0	1,05	58	0	0,75	58	0	0,73
TW-A13C63	13	23	3	25	0	0,00	25	0	0,00	25	0	0,00
TW-A13C64	13	23	3	20	0	0,02	20	0	0,02	20	0	0,02
TW-A13C65	13	23	3	25	0	0,08	25	0	0,00	25	0	0,13
TW-A13C66	13	23	7	49	0	0,14	49	0	0,00	49	0	0,00
TW-A13C67	13	23	7	47	0	0,30	47	0	0,05	47	0	0,11
TW-A13C68	13	23	7	55	0	0,70	55	0	0,62	55	0	0,37
TW-A13C69	13	23	12	69	0	0,09	69	0	0,11	69	0	0,03
TW-A13C70	13	23	12	65	0	1,34	65	0	0,75	65	0	0,27
TW-A13C71	13	23	12	70	0	0,37	70	0	0,09	70	0	0,42
TW-A20B54	20	31	4	42	0	0,00	42	0	0,08	42	0	0,00
TW-A20B55	20	31	4	40	0	0,03	40	0	0,03	40	0	0,00
TW-A20B56	20	31	4	35	0	0,12	35	0	0,11	35	0	0,11
TW-A20B57	20	31	10	69	0	0,12	69	0	0,22	69	0	0,08
TW-A20B58	20	31	10	63	0	0,19	63	0	0,05	63	0	0,12
TW-A20B59	20	31	10	69	0	1,17	69	0	1,25	69	0	0,97
TW-A20B60	20	31	16	94	0	0,09	94	0	0,13	94	0	0,11

Instância	X	E	R	Monroy-Licht et al. (2014)			Modelo 1			Modelo 2		
				FO	GAP%	T	FO	GAP%	T	FO	GAP%	T
TW-A20B61	20	31	16	85	0	73,64	85	0	5,39	85	0	5,27
TW-A20B62	20	31	16	98	0	6,50	98	0	0,75	98	0	2,44
TW-A40C216	40	69	7	117	0	0,00	117	0	0,06	117	0	0,03
TW-A40C217	40	69	7	82	0	0,16	82	0	0,33	82	0	0,14
TW-A40C218	40	69	7	90	0	0,97	90	0	0,42	90	0	0,23
TW-A40C219	40	69	21	200	0	0,20	200	0	0,48	200	0	0,19
TW-A40C220	40	69	21	179	0	135,15	179	0	33,72	179	0	18,86
TW-A40C221	40	69	21	156	0	1,53	156	0	0,50	156	0	0,27
TW-A40C222	40	69	35	249	0	9,66	249	0	0,56	249	0	1,92
TW-A40C223	40	69	35	274	0	913,74	274	0	322,88	274	0	311,55
TW-A40C224	40	69	35	245	0	1389,55	245	0	496,09	245	0	602,05
TW-A40D225	40	69	7	103	0	0,02	103	0	0,08	103	0	0,02
TW-A40D226	40	69	7	112	0	0,53	112	0	0,31	112	0	0,33
TW-A40D227	40	69	7	98	0	0,69	98	0	0,37	98	0	0,11
TW-A40D228	40	69	21	187	0	0,97	187	0	0,87	187	0	0,41
TW-A40D229	40	69	21	200	0	48,22	200	0	9,03	200	0	3,75
TW-A40D230	40	69	21	184	0	133,74	184	0	24,95	184	0	18,59
TW-A40D231	40	69	35	270	0	26,00	270	0	1,00	270	0	2,72
TW-A40D232	40	69	35	265	0	1507,59	265	0	300,10	265	0	237,62
TW-A40D233	40	69	35	271	0	563,68	271	0	36,36	271	0	40,67
TW-A60A126	60	90	9	184	0	0,02	184	0	0,02	184	0	0,03
TW-A60A127	60	90	9	158	0	0,98	158	0	0,44	158	0	0,64
TW-A60A128	60	90	9	157	0	0,45	157	0	0,69	157	0	0,14
TW-A60A129	60	90	27	405	0	4,03	405	0	13,33	405	0	1,81
TW-A60A130	60	90	27	382	0	882,12	382	0	114,76	382	0	216,88
TW-A60A131	60	90	27	337	0	54,22	337	0	19,72	337	0	22,62
TW-A60A132	60	90	45	502	0	366,62	502	0	350,51	502	0	126,41
TW-A60A133	60	90	45	504	0	385,18	504	0	111,30	504	0	258,11
TW-A60A134	60	90	45	463	0	780,33	463	0	515,14	463	0	434,3
TW-B10A45	10	15	2	20	0	0,00	20	0	0,00	20	0	0,00
TW-B10A46	10	15	2	30	0	0,06	30	0	0,00	30	0	0,00
TW-B10A47	10	15	2	28	0	0,00	28	0	0,03	28	0	0,08
TW-B10A48	10	15	5	33	0	0,02	33	0	0,00	33	0	0,00
TW-B10A49	10	15	5	31	0	0,02	31	0	0,00	31	0	0,00
TW-B10A50	10	15	5	32	0	0,05	32	0	0,00	32	0	0,02
TW-B10A51	10	15	8	47	0	0,11	47	0	0,00	47	0	0,02
TW-B10A52	10	15	8	44	0	0,25	44	0	0,06	44	0	0,03
TW-B10A53	10	15	8	48	0	0,42	48	0	0,08	48	0	0,06
TW-B13A36	13	23	3	25	0	0,08	25	0	0,00	25	0	0,00
TW-B13A37	13	23	3	35	0	0,05	35	0	0,00	35	0	0,00
TW-B13A38	13	23	3	20	0	0,06	20	0	0,00	20	0	0,00
TW-B13A39	13	23	7	51	0	0,08	51	0	0,00	51	0	0,00
TW-B13A40	13	23	7	36	0	0,06	36	0	0,00	36	0	0,03
TW-B13A41	13	23	7	41	0	0,67	41	0	0,30	41	0	0,30
TW-B13A42	13	23	12	69	0	0,09	69	0	0,06	69	0	0,03
TW-B13A43	13	23	12	75	0	1,08	75	0	0,61	75	0	0,47

Instância	$ X $	$ E $	$ R $	Monroy-Licht et al. (2014)			Modelo 1			Modelo 2		
				FO	GAP%	T	FO	GAP%	T	FO	GAP%	T
TW-B13A44	13	23	12	63	0	0,67	63	0	0,83	63	0	0,09
TW-B13B27	13	23	3	21	0	0,00	21	0	0,00	21	0	0,00
TW-B13B28	13	23	3	32	0	0,02	32	0	0,06	32	0	0,00
TW-B13B29	13	23	3	31	0	0,00	31	0	0,08	31	0	0,05
TW-B13B30	13	23	7	46	0	0,09	46	0	0,08	46	0	0,05
TW-B13B31	13	23	7	43	0	0,28	43	0	0,08	43	0	0,11
TW-B13B32	13	23	7	42	0	0,27	42	0	0,09	42	0	0,09
TW-B13B33	13	23	12	70	0	0,09	70	0	0,05	70	0	0,08
TW-B13B34	13	23	12	71	0	0,28	71	0	0,77	71	0	0,19
TW-B13B35	13	23	12	62	0	0,64	62	0	0,16	62	0	0,23
TW-B13C18	13	23	3	31	0	0,00	31	0	0,03	31	0	0,00
TW-B13C19	13	23	3	33	0	0,02	33	0	0,06	33	0	0,00
TW-B13C20	13	23	3	24	0	0,06	24	0	0,03	24	0	0,00
TW-B13C21	13	23	7	49	0	0,00	49	0	0,06	49	0	0,00
TW-B13C22	13	23	7	48	0	0,31	48	0	0,12	48	0	0,03
TW-B13C23	13	23	7	41	0	0,34	41	0	0,45	41	0	0,06
TW-B13C24	13	23	12	61	0	0,03	61	0	0,08	61	0	0,05
TW-B13C25	13	23	12	70	0	0,72	70	0	0,11	70	0	0,23
TW-B13C26	13	23	12	68	0	1,39	68	0	6,42	68	0	0,67
TW-B20B09	20	31	4	41	0	0,00	41	0	0,00	41	0	0,02
TW-B20B10	20	31	4	47	0	0,02	47	0	0,00	47	0	0,00
TW-B20B11	20	31	4	42	0	0,20	42	0	0,09	42	0	0,00
TW-B20B12	20	31	10	69	0	0,08	69	0	0,08	69	0	0,06
TW-B20B13	20	31	10	68	0	0,67	68	0	0,05	68	0	0,22
TW-B20B14	20	31	10	74	0	0,56	74	0	0,64	74	0	0,39
TW-B20B15	20	31	16	91	0	0,41	91	0	0,52	91	0	0,14
TW-B20B16	20	31	16	80	0	0,80	80	0	0,47	80	0	0,37
TW-B20B17	20	31	16	98	0	1,73	98	0	0,62	98	0	0,27
TW-B40C207	40	69	7	109	0	0,03	109	0	0,05	109	0	0,02
TW-B40C208	40	69	7	83	0	0,13	83	0	0,06	83	0	0,08
TW-B40C209	40	69	7	98	0	0,72	98	0	0,62	98	0	0,67
TW-B40C210	40	69	21	192	0	1,45	192	0	0,67	192	0	1,09
TW-B40C211	40	69	21	199	0	86,81	199	0	43,48	199	0	9,51
TW-B40C212	40	69	21	160	0	2,44	160	0	1,20	160	0	1,91
TW-B40C213	40	69	35	225	0	14,17	225	0	1,55	225	0	1,37
TW-B40C214	40	69	35	247	0	169,54	247	0	15,87	247	0	19,17
TW-B40C215	40	69	35	255	0	506,71	255	0	39,72	255	0	9,87
TW-B40D198	40	69	7	105	0	0,02	105	0	0,00	105	0	0,02
TW-B40D199	40	69	7	92	0	0,09	92	0	0,25	92	0	0,02
TW-B40D200	40	69	7	114	0	0,62	114	0	0,25	114	0	0,16
TW-B40D201	40	69	21	200	0	0,92	200	0	0,41	200	0	0,19
TW-B40D202	40	69	21	193	0	53,59	193	0	9,70	193	0	8,17
TW-B40D203	40	69	21	185	0	23,03	185	0	2,30	185	0	2,62
TW-B40D204	40	69	35	248	0	16,17	248	0	3,91	248	0	2,67
TW-B40D205	40	69	35	261	0	114,01	261	0	89,79	261	0	48,42
TW-B40D206	40	69	35	256	0	851,85	256	0	305,17	256	0	290,07

Instância	X	E	R	Monroy-Licht et al.(2014)			Modelo 1			Modelo 2		
				FO	GAP%	T	FO	GAP%	T	FO	GAP%	T
TW-B60A108	60	90	9	182	0	0,00	182	0	0,02	182	0	0,02
TW-B60A109	60	90	9	181	0	0,77	181	0	0,47	181	0	0,45
TW-B60A110	60	90	9	189	0	0,77	189	0	0,50	189	0	0,47
TW-B60A111	60	90	27	329	0	1,56	329	0	0,92	329	0	0,98
TW-B60A112	60	90	27	422	0	1767,89	422	0	268,78	422	0	1349,02
TW-B60A113	60	90	27	-	-	1800	440	3,86	1800	440	0	1767,63
TW-B60A114	60	90	45	545	0	70,78	545	0	4,12	545	0	4,19
TW-B60A115	60	90	45	-	-	1800	-	-	1800	-	-	1800
TW-B60A116	60	90	45	510	0	1574,95	516	3,49	1800	510	0	458,26
TW-B60A117	60	90	9	156	0	0,00	156	0	0,02	156	0	0,02
TW-B60A118	60	90	9	138	0	0,12	138	0	0,25	138	0	0,02
TW-B60A119	60	90	9	181	0	1,28	181	0	0,81	181	0	0,16
TW-B60A120	60	90	27	396	0	36,01	396	0	14,98	396	0	6,39
TW-B60A121	60	90	27	347	0	45,34	347	0	3,44	347	0	6,16
TW-B60A122	60	90	27	348	0	371,72	348	0	137,05	348	0	54,92
TW-B60A123	60	90	45	526	1,71	1800	526	1,96	1800	526	1,14	1800
TW-B60A124	60	90	45	505	0	1614,60	505	0	1061,39	505	0	278,42
TW-B60A125	60	90	45	471	0	1093,41	471	0	171,14	471	0	81,68
TW-C10A189	10	15	2	28	0	0,00	28	0	0,00	28	0	0,00
TW-C10A190	10	15	2	28	0	0,00	28	0	0,00	28	0	0,00
TW-C10A191	10	15	2	32	0	0,05	32	0	0,00	32	0	0,00
TW-C10A192	10	15	5	39	0	0,00	39	0	0,03	39	0	0,05
TW-C10A193	10	15	5	34	0	0,00	34	0	0,02	34	0	0,00
TW-C10A194	10	15	5	34	0	0,00	34	0	0,08	34	0	0,03
TW-C10A195	10	15	8	49	0	0,00	49	0	0,00	49	0	0,03
TW-C10A196	10	15	8	43	0	0,09	43	0	0,08	43	0	0,05
TW-C10A197	10	15	8	40	0	0,08	40	0	0,05	40	0	0,08
TW-C13A180	13	23	3	30	0	0,02	30	0	0,00	30	0	0,00
TW-C13A181	13	23	3	25	0	0,02	25	0	0,00	25	0	0,06
TW-C13A182	13	23	3	37	0	0,00	37	0	0,00	37	0	0,03
TW-C13A183	13	23	7	38	0	0,00	38	0	0,00	38	0	0,00
TW-C13A184	13	23	7	46	0	0,19	46	0	0,02	46	0	0,03
TW-C13A185	13	23	7	45	0	0,27	45	0	0,22	45	0	0,08
TW-C13A186	13	23	12	66	0	0,03	66	0	0,05	66	0	0,05
TW-C13A187	13	23	12	66	0	0,83	66	0	0,44	66	0	0,66
TW-C13A188	13	23	12	56	0	1,44	56	0	1,11	56	0	2,09
TW-C13B171	13	23	3	30	0	0,00	30	0	0,02	30	0	0,00
TW-C13B172	13	23	3	22	0	0,00	22	0	0,00	22	0	0,02
TW-C13B173	13	23	3	32	0	0,00	32	0	0,00	32	0	0,02
TW-C13B174	13	23	7	54	0	0,09	54	0	0,08	54	0	0,02
TW-C13B175	13	23	7	50	0	0,19	50	0	0,33	50	0	0,41
TW-C13B176	13	23	7	41	0	0,03	41	0	0,14	41	0	0,09
TW-C13B177	13	23	12	68	0	0,09	68	0	0,05	68	0	0,06
TW-C13B178	13	23	12	64	0	0,69	64	0	0,77	64	0	0,09
TW-C13B179	13	23	12	68	0	0,87	68	0	0,31	68	0	0,39
TWC-13C162	13	23	3	38	0	0,00	38	0	0,00	38	0	0,00

Instância	X	E	R	Monroy-Licht et al. (2014)			Modelo 1			Modelo 2		
				FO	GAP%	T	FO	GAP%	T	FO	GAP%	T
TW-C13C163	13	23	3	20	0	0,00	20	0	0,05	20	0	0,00
TW-C13C164	13	23	3	24	0	0,00	24	0	0,02	24	0	0,00
TW-C13C165	13	23	7	47	0	0,02	47	0	0,06	47	0	0,02
TW-C13C166	13	23	7	44	0	0,11	44	0	0,02	44	0	0,03
TW-C13C167	13	23	7	41	0	0,50	41	0	0,19	41	0	0,28
TW-C13C168	13	23	12	62	0	0,06	62	0	0,03	62	0	0,06
TW-C13C169	13	23	12	68	0	1,37	68	0	0,55	68	0	0,39
TW-C13C170	13	23	12	69	0	5,84	69	0	0,55	69	0	2,72
TW-C20B153	20	31	4	41	0	0,00	41	0	0,00	41	0	0,00
TW-C20B154	20	31	4	36	0	0,02	36	0	0,00	36	0	0,00
TW-C20B155	20	31	4	38	0	0,17	38	0	0,17	38	0	0,02
TW-C20B156	20	31	10	69	0	0,02	69	0	0,03	69	0	0,03
TW-C20B157	20	31	10	64	0	0,66	64	0	0,41	64	0	0,08
TW-C20B158	20	31	10	76	0	0,48	76	0	0,28	76	0	0,27
TW-C20B159	20	31	16	94	0	0,20	94	0	0,09	94	0	0,08
TW-C20B160	20	31	16	96	0	0,94	96	0	0,36	96	0	0,61
TW-C20B161	20	31	16	95	0	2,77	95	0	1,00	95	0	2,69
TW-C40C144	40	69	7	101	0	0,00	101	0	0,00	101	0	0,02
TW-C40C145	40	69	7	94	0	0,12	94	0	0,20	94	0	0,02
TW-C40C146	40	69	7	115	0	0,58	115	0	0,50	115	0	0,41
TW-C40C147	40	69	21	179	0	1,19	179	0	0,37	179	0	0,84
TW-C40C148	40	69	21	183	0	46,92	183	0	15,47	183	0	8,44
TW-C40C149	40	69	21	175	0	202,75	175	0	46,82	175	0	12,41
TW-C40C150	40	69	35	292	0	57,23	292	0	19,64	292	0	10,59
TW-C40C151	40	69	35	270	0	863,60	270	0	477,53	270	0	137,33
TW-C40C152	40	69	35	289	3,81	1800	292	4,79	1800	292	4,79	1800
TW-C40D135	40	69	7	95	0	0,02	95	0	0,02	95	0	0,02
TW-C40D136	40	69	7	83	0	0,23	83	0	0,09	83	0	0,22
TW-C40D137	40	69	7	76	0	0,42	76	0	0,25	76	0	0,30
TW-C40D138	40	69	21	198	0	4,11	198	0	1,47	198	0	0,72
TW-C40D139	40	69	21	181	0	11,28	181	0	0,70	181	0	0,47
TW-C40D140	40	69	21	168	0	23,33	168	0	9,33	168	0	5,11
TW-C40D141	40	69	35	248	0	3,95	248	0	1,59	248	0	2,02
TW-C40D142	40	69	35	262	0	132,42	262	0	41,42	262	0	20,86
TW-C40D143	40	69	35	265	0	238,75	265	0	330,05	265	0	119,38
TW-C60A099	60	90	9	218	0	0,02	218	0	0,02	218	0	0,00
TW-C60A100	60	90	9	176	0	0,81	176	0	0,45	176	0	0,33
TW-C60A101	60	90	9	167	0	0,09	167	0	0,03	167	0	0,08
TW-C60A102	60	90	27	387	0	25,97	387	0	4,00	387	0	3,27
TW-C60A103	60	90	27	357	0	1,55	357	0	0,39	357	0	0,64
TW-C60A104	60	90	27	373	0	694,83	373	0	670,56	373	0	448,91
TW-C60A105	60	90	45	565	0	174,04	565	0	16,86	565	0	9,81
TW-C60A106	60	90	45	467	0	636,50	467	0	82,46	467	0	87,84
TW-C60A107	60	90	45	-	-	1800	508	0	84,04	508	0	557,49

Fonte: O Autor (2019)